Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 8 - Seskvilineární formy, Sylvestrovo kritérium

1. Proveďte unitární diagonalizaci matice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Popište všechny vektory $x \in \mathbb{R}^3$, pro které je kvadratická forma $Q(x) = x^T Ax$ rovna nule, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
3. Přizpůsobte metodu symetrických úprav pro hermitovské kvadratické formy na komplexním prostoru. Najděte pomocí ní bázi, vzhledem k níž má hermitovská kvadratická forma na $\mathbb{C}^2$ zadaná předpisem
$$Q(x) = -2 \operatorname{Im} x_1 \bar{x}_2 - 3|x_2|^2$$
diagonální matici.
4. Dokažte, že každé normální lineární zobrazení, jehož všechna vlastní čísla leží na jednotkové kružnici, je unitární.
5. Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$:
$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$$
6. Určete $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, aby kvadratická forma Q na $\mathbb{R}^3$ byla pozitivně definitní, přičemž
$$Q(u) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + \lambda x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$
7. Zapište matici
$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$
jako součin $U^T U$.
8. Určete signaturu blokové $2n \times 2n$ matice
$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$
kde E je jednotková $n \times n$ matice.