Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 7 - Kvadratické formy

1. Nechť $V = \mathbb{R}^n$, $\psi \in V^*$ je lineární funkcionál, jehož souřadnice vzhledem k duální kanonické bázi jsou $(a_i)_1^n$. Definujme zobrazení $Q : V \to \mathbb{R}$ předpisem $Q(u) = \psi(u)^2$. Dokažte, že je to kvadratická forma, najděte její matici vzhledem ke kanonické bázi a určete její hodnost.
2. Nechť $V = \mathbb{R}^n$, $\phi, \psi \in V^*$ jsou dva lineární funkcionály, jejichž souřadnice vzhledem k duální kanonické bázi jsou $(a_i)_1^n$, $(b_i)_1^n$. Definujme zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$ předpisem $B(u, v) = \phi(u)\psi(v)$. Dokažte, že je to bilineární forma, najděte její matici vzhledem ke kanonické bázi a rozložte ji na symetrickou a antisymetrickou část.
3. Na prostoru $V = M_{22}(\mathbb{R})$ definujme zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$ vztahem $B(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. Ověřte, že B je bilineární forma a najděte její matici vzhledem k bázi
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
4. Nechť $M = \{(1, 3), (1, 2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
matice bilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k $M' := \{(2, 3), (3, 5)\}$.
5. Bilineární forma B na $\mathbb{R}^3$ má vůči kanonické bázi matici
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Najděte bázi M, vzhledem k níž má B diagonální tvar s celými čísly na diagonále, a určete tuto matici.
6. Proveďte ortogonální diagonalizaci kvadratické formy $7x^2 - 12xy - 2y^2$ na $\mathbb{R}^2$.
7. Proveďte diagonalizaci kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$, jejíž předpis je
$$Q(x) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 4xz + 2yz$$
8. V $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3$. Můžete využít faktu, že vlastní čísla jsou ± 9.
9. Dokažte, že množina všech kvadratických forem na prostoru $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor, a určete jeho dimenzi.