Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 6 - Lineární funkcionály

1. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a,b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a,b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $F_x : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M,\mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.
   (e) $F : M^{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$
2. Nechť $W = \langle (1,1,2,1), (3,1,2,1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Popište všechny lineární formy, které vymizí na celém W.
3. Najděte duální bázi k bázi $\{(3,-5), (-2,3)\} \subset \mathbb{R}^2$.
4. Najděte bázi $M \subset \mathbb{R}^2$, k níž je báze $\{3x_1 - x_2, -8x_1 + 3x_2\} \subset (\mathbb{R}^2)^*$ duální.
5. Nechť $M = \{(1,3), (1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, $\alpha_i := (1,2)$ souřadnice lineárního funkcionálu vzhledem k M^*. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $(M')^*$, kde $M' := \{(3,1), (3,2)\}$.
6. Nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je homomorfismus zadaný svou maticí vzhledem ke kanonickým bázím:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Najděte matici ϕ^* vzhledem k duálním bázím k $\{(1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$ a $\{(1,2), (1,3)\}$.
7. Nechť $M = \{(1,1), (2,3)\}$, $N = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je homomorfizmus, jehož matice vzhledem k bázím M a N je
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Určete matici ϕ^* vzhledem ke kanonickým bázím.
8. Proveďte ortogonální diagonalizaci symetrické matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$