

Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 5 - Jordanův tvar

1. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Ověřte, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, a najděte její Jordanovu bázi a Jordanův tvar.

3. Spočítejte

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & -6 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{666}$$

4. Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$.

5. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $(\lambda^2 - 1)^2(1 - \lambda)$.

6. Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $\lambda^4(1 - \lambda)$.

7. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F , který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p'(x) - x^2 p''(x)$.

8. Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2 \rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x, y)) = p(x + 1, y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

9. Nechť N je nilpotentní matice. Dokažte, že pak $E - N$ je regulární a její inverzní matice je $\sum_{i=0}^{\infty} N^i$ (díky nilpotenci má řada ve skutečnosti jen konečně mnoho nenulových členů). Odvoďte z toho, jak vypadá $J_k(\lambda)^{-1}$.
10. Najděte Jordanův tvar matice $J_k(\lambda)^T$. Dokažte odtud, že pro každou čtvercovou matici A existuje regulární matice P , že $A = PA^T P^{-1}$.