Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 4 - vlastní čísla a vektory

1. Určete $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{100}$
2. Najděte vlastní čísla a vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Najděte nějakou matici 2×2, která není horní ani dolní trojúhelníková a má vlastní čísla 5 a 6.
4. Dokažte, že každá symetrická reálná 2×2 matice má dvě různá reálná vlastní čísla, právě když není násobkem jednotkové matice. Dokažte dále, že pro každou takovou matici jsou vlastní podprostory na sebe kolmé.
5. Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $f : P^2(x, \mathbb{C}) \to P^2(x, \mathbb{C})$ daného vztahem $f(a + bx + cx^2) = (5a + 6b + 2c) - (b + 8c)x + (a - 2c)x^2$
6. Diagonalizujte matici $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
7. V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2 najděte bázi, v níž je matice zobrazení T, které reálnému polynomu $f(x)$ přiřazuje polynom $(Tf)(x) = f(0) + f(1)(x + x^2)$, diagonální.
8. Najděte vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, které je definováno předpisem
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{pmatrix}$$
9. Spočítejte charakteristický polynom matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}$
10. Každý rok se 1/10 z celkových K obyvatel Kocourkova odstěhuje do Tramtárie a 1/5 z celkových T obyvatel Tramtárie se zase odstěhuje do Kocourkova. Kdo se neodstěhuje, zůstává na místě. Určete matici zobrazení, které přiřazuje vektoru (K, T) vektor počtu obyvatel příští rok a poté určete, kolik obyvatel bude kde bydlet až naprší a uschne (tj. za 42 let).
11. Nechť A, B jsou $n \times n$ komplexní matice, λ je vlastní číslo matice A a μ je vlastní číslo matice B. Pak λ^k je vlastní číslo A^k, protože $A^k v = A^{k-1}Av = A^{k-1}\lambda v = \lambda A^{k-1} v = \ldots = \lambda^k v$ a $\lambda\mu$ je vlastní číslo AB, protože $ABv = A\mu v = \mu A v = \lambda\mu v$. Platí to? Pokud ne, kde je chyba?
12. Ověřte pro obecnou matici 2×2, že když ji dosadíme do jejího charakteristického polynomu, dostaneme nulovou matici (Cayley-Hamiltonova věta).
13. Najděte zobecněné vlastní podprostory matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$