Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 3 - Matice přechodu, skalární součin

1. Určete matici přechodu od báze $M = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}$ k bázi $N = \{x^2+2, x^2-3x+1, x^2+x+3\}$ v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.
2. Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázím $\{(1,2),(1,3)\}$ a $\{(1,0,1),(1,0,2),(3,1,2)\}$ matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Určete jeho matici vzhledem k bázím $\{(1,1),(1,0)\}$ a $\{(1,-1,1),(-2,1,0),(1,0,0)\}$
3. Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázím $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$ a $\{(1,1),(0,-1)\}$ matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete obraz vektoru (x,y,z).
4. Nechť $f \in End(V)$ je endomorfismus. Dokažte, že hodnota determinantu jeho matice $(f)_{MM}$ nezávisí na volbě báze M. Má tedy smysl mluvit o veličině $\det f := \det(f)_{MM}$.
5. Nechť $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $N = \{u_1, \ldots, u_n\}$ jsou ortonormální báze reálného vektorového prostoru. Napište definici matice přechodu od M k N a dokažte, že je tato matice ortogonální.
6. Nechť V je prostor se skalárním součinem, $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ jeho báze a $N = \{u_1, \ldots, u_n\}$ báze, která vznikne z M procesem Gram-Schmidtovy ortogonalizace. Ukažte, že matice přechodu od N k M je horní trojúhelníková.
7. Nechť $V = M_{nn}(\mathbb{R})$. Ukažte, že bilineární forma $\langle A, B\rangle := Tr(AB)$ není skalární součin na V.
8. Najděte v $M_{22}(\mathbb{R})$ se skalárním součinem $\langle A, B\rangle := Tr(AB^T)$ ortogonální doplněk prostoru
$$L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
9. Definujme na prostoru $P^2(x, \mathbb{R})$ skalární součin předpisem
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
Proveďte Gram-Schmidtovu ortogonalizaci báze $\{1, x, x^2\}$.
10. Na prostoru $V = \mathbb{R}^n$ přiřaďme každému vektoru $x \in V$ reálné číslo
$$\|x\| := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|$$
Dokažte, že toto zobrazení je norma na V, ale že nesplňuje rovnoběžníkové pravidlo, takže nepřísluší žádnému skalárnímu součinu.