Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 2 - Vektorové prostory a lineární zobrazení

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru všech reálných matic $n \times n$ s operacemi sčítání a násobení číslem z $\mathbb{R}$. Zdůvodněte.
   (a) množina všech symetrických matic
   (b) množina všech ortogonálních matic
   (c) množina všech matic v odstupňovaném tvaru
   (d) Pro pevné $b \in \mathbb{R}^n$, množina všech matic A takových, že soustava s maticí $(A|b)$ má řešení.
2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru všech nekonečných reálných posloupností $\{a_i\}_0^\infty$ s operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem. Zdůvodněte.
   (a) množina všech konvergentních posloupností
   (b) množina všech periodických posloupností
   (c) množina všech posloupností splňujících rekurentní vztah $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$
   (d) množina všech posloupností se sudým počtem nenulových členů
3. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru všech reálných polynomů se sčítáním polynomů a násobením polynomu číslem. Zdůvodněte.
   (a) množina obsahující všechny polynomy stupně n a nulový polynom
   (b) množina všech polynomů majících pouze reálné kořeny
   (c) množina všech polynomů, pro něž je aritmetický průměr jejich hodnot na množině $\{-1, 1, 3, 7\}$ nulový
   (d) množina všech polynomů, které mají nenulové pouze koeficienty u sudých řádech
4. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ je lineárně nezávislá množina $\{5x^2 + 2x - 1, x^2 + x, 2x^2 - ax - 1\}$ funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
5. Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 3x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)
6. Rozhodněte, jestli je funkce $\cos 3x$ v lineárním obalu množiny funkcí $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x\}$ (ve vektorovém prostoru všech reálných funkcí nad $\mathbb{R}$)
7. Rozhodněte, která z níže uvedených zobrazení $f : V \to W$ jsou lineární:
   (a) $V = W = \mathbb{C}$ a f je komplexní sdružení $f(v) = \bar{v}$
   (b) V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně n, $W = \mathbb{R}$, $f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
   (c) $V = W$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ a F je zobrazení přiřazující funkci její absolutní hodnotu $F(g) = |g|$.
   (d) $V = W$ je prostor všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$ a F je zobrazení přiřazující funkci g funkci $F(g)$ předpisem $[F(g)](x) = g(x) - g(-x)$.
8. Najděte matici zobrazení $f : P^2(x, \mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(2) & p(3) \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázím $\{1, x, x^2\}$ a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

9. Najděte matici zobrazení $f : M_{22}(\mathbb{R}) \to P_2(x, \mathbb{R})$, definovaného vztahem

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = a + d + (c + 2b)x^2$$

vzhledem k bázím

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a $\{x^2, 2x^2 - 1, x + 3\}$.

10. Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$ vzhledem ke kanonickým bázím $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ a vzhledem k bázím $M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ a $M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$.

11. Určete matici lineárního zobrazení $f : P_2(x, \mathbb{R}) \to P_2(x, \mathbb{R})$ přiřazujícího polynomu $p(x)$ polynom $p'(x) - 2p(x)$, kde $p'(x)$ je první derivace $p(x)$, vzhledem k bázím $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$ a $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$.

12. Nechť V je prostor všech reálných čtvercových matic stupně 2 a definujme zobrazení $f : V \to V$ vztahem $f(X) = BXB^{-1}$, kde

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je nějaká regulární matice. Určete matici zobrazení f_B vzhledem k bázi

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

13. Určete matici ortogonální projekce $P_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na vektor $u = (1, 2, 4)$ vzhledem ke kanonickým bázím.

14. Najděte matici lineárního zobrazení $f : P_n(x, \mathbb{R}) \to P_n(x, \mathbb{R})$ přiřazující polynomu $p(x)$ polynom $p(x - 1)$ vzhledem k bázi $\{1, x, \ldots, x^n\}$.