Lineární algebra pro matematiky - LS 11/12

Sada 1 - QR rozklad a pseudoinverze

1. Proveďte QR-rozklad matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pomocí Givensových rotací.
2. Na cvičení jsme ukázali, že je vždy možné pomocí Givensových rotací a nejvýše jedné matice reflexe podle nadroviny převést matici A na horní trojúhelníkovou. Dokažte z toho, že každá ortogonální matice je součinem matic Givensových rotací a nejvýše jedné matice reflexe podle nadroviny.
3. Určete pseudoinverzi matici k $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. Napište vzorec pro pseudoinverzi matice plné sloupcové hodnosti a ověřte, že splňuje čtyři vlastnosti, které pseudoinverzní matici jednoznačně určují.
5. Napište vzorec pro pseudoinverzi matice plné řádkové hodnosti a ověřte, že splňuje čtyři vlastnosti, které pseudoinverzní matici jednoznačně určují.
6. Nechť A je matice a $A = BC$ její faktorizace maticemi hodnosti $r(A)$. Dokažte, že matice $C^\dagger B^\dagger$ splňuje čtyři vlastnosti pseudoinverzní matice A a je tedy rovna $A^\dagger$.
7. Nechť A je matice a $A = BC$ její faktorizace maticemi hodnosti $r := r(A)$. Dokažte, že matice $A^\dagger = C^\dagger B^\dagger$ je rovna $C^T(B^TAC^T)^{-1}B^T$. Dále dokažte, že pokud $B' = BX$, $C' = CY$, kde X, Y jsou regulární $r \times r$ matice, pak $A^\dagger = C'^T(B'^TAC'^T)^{-1}B'^T$, čili že ve vzorci pro $A^\dagger$ stačí použít libovolnou matici B', jejíž sloupce tvoří bázi $S(A)$ a libovolnou matici C', jejíž řádky tvoří bázi $R(A)$, tyto dvě matice nemusí A faktorizovat.
8. Určete pseudoinverzní matici k $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
9. Určete faktorizaci maticemi maximální hodnosti a pseudoinverzní matici k $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10. Spočítejte matici ortogonální projekce na podprostor $\langle(1, 2, 0), (2, -1, 1)\rangle$ pomocí pseudoinverzní matice.
11. Najděte aproximativní řešení soustavy s rozšířenou maticí
$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
12. Najděte přímku, která je lineární regresí bodů $[-1, 1]$, $[0, 3]$, $[1, -3]$ a $[2, 5]$.
13. Najděte kvadratický polynom, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje body $[-1, 1]$, $[0, 3]$, $[1, -3]$ a $[2, 5]$. Inverzi k matici 3×3, která je k dokončení výpočtu potřeba, počítat nemusíte.