ZÁPISEK ČTVRTÝ O SAMOSDRUŽENÝCH OPERÁTORECH

LAF, LS10/11, DALIBOR ŠMÍD

Adjungovaný operátor

Pokud nebude řečeno jinak, budeme se v tomto zápisku zabývat komplexními konečnědimenzionálními vektorovými prostory se skalárním součinem. Skalární součin budeme značit závorkou $(\cdot,\cdot)$, případně indexem vyznačíme, na kterém vektorovém prostoru jej uvažujeme. Lineární zobrazení $\mathbb{A} : V \to W$ budeme nazývat také **operátorem** a ve shodě s definicí v zimním semestru budeme značit $\mathbb{A}^* : W \to V$ k němu **adjungovaný** nebo též **sdružený operátor**, který je jednoznačně určen požadavkem $\forall v \in V, w \in W$

$$(\mathbb{A}v, w)_W = (v, \mathbb{A}^* w)_V$$

Spolu s pojmem operátor zde zavádíme zjednodušené značení $\mathbb{A}v$ místo $\mathbb{A}(v)$. Pokud $V = W$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$, pak je operátor $\mathbb{A}$ **samosdružený.** Zopakujme formou tvrzení několik faktů o adjungovaných operátorech:

Věta. *Nechť V, W, X jsou tři vektorové prostory, $M = \{v_i\} \subset V$, $N = \{w_i\} \subset W$ jsou ortonormální báze, $\mathbb{A}, \mathbb{B} : V \to W$, $\mathbb{D} : W \to X$ jsou operátory. Pak $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí*

(1) $(\alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B})^* = \bar{\alpha}\mathbb{A}^* + \bar{\beta}\mathbb{B}^*$
(2) $(\mathbb{D}\mathbb{A})^* = \mathbb{A}^*\mathbb{D}^*$
(3) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$
(4) $\operatorname{Ker}\mathbb{A} = (\operatorname{Im}\mathbb{A}^*)^\perp, \operatorname{Ker}\mathbb{A}^* = (\operatorname{Im}\mathbb{A})^\perp$
(5) $\operatorname{Ker}\mathbb{A} = \operatorname{Ker}\mathbb{A}^*\mathbb{A}$
(6) $(\mathbb{A}^*)_{MN} = \overline{(\mathbb{A})}^+_{NM}$
(7) $\det(\mathbb{A}^*) = \overline{\det\mathbb{A}}$
(8) *Pokud je $\mathbb{A}$ samosdružený, pak je $(\mathbb{A})_{NM}$ hermitovská matice.*

Důkaz ponecháváme čtenáři za cvičení, s případným využitím zápisků z minulého semestru.

Příklad. Uvažujme operátor $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definovaný předpisem $\mathbb{A}x = Ax$, kde $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$. Předpokládejme, že v $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{C}^m$ máme standardní skalární součin. Pak je matice $\mathbb{A}^*$ rovna A^+. Nechť $b \in \mathbb{C}^m$. Soustava rovnic $Ax = b$ má řešení právě když $b \in \operatorname{Im}\mathbb{A} =: \operatorname{Im} A$, jinými slovy, pokud b je lineární kombinací sloupců matice A. Pokud řešení neexistuje, můžeme hledat alespoň jeho nejlepší aproximaci, určenou požadavkem, aby $\|Ax - b\|$ bylo minimální. To nastane právě tehdy, když je Ax ortogonální projekce b do $\operatorname{Im} A$. Stačí tedy Gram-Schmidtovou metodou ortogonalizovat sloupce matice A, spočítat $P_{\operatorname{Im} A} b$ jako součet projekcí na jednotlivé vektory ortogonální báze a poté vyřešit soustavu rovnic

$$Ax = P_{\operatorname{Im} A} b.$$

Date: 2. května 2011.

Existuje ale jednodušší metoda. Je-li Ax ortogonální projekce b na $\operatorname{Im} A$, pak pro všechny sloupce a_k matice A platí

$$0 = (b - Ax, a_k) = \sum_{i=1}^{m} \overline{(a_k)_i}(b - Ax)_i$$

Poslední výraz je vlastně k-tá složka sloupcového vektoru $A^+(b - Ax)$. Hledané x tedy najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$A^+ A x = A^+ b.$$

Pokud je $\mathbb{A}$ prostý operátor (čili sloupce A jsou lineárně nezávislé), pak je dle předchozí věty $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ izomorfismus, tedy A^+A je regulární matice. Potom je řešení soustavy možné získat aplikací inverzní matice $x = (A^+A)^{-1}A^+b$ a odtud vyjádřit projekci na $\operatorname{Im} A$ jako

$$P_{\operatorname{Im} A} b = Ax = A(A^+A)^{-1}A^+b$$

Příklad. Výše uvedenou metodu lze použít například na fitování dat lineárním obalem množiny funkcí. Nejjednodušším příkladem je lineární regrese, kdy fitujeme funkcemi tvaru $ax + b$. Uvažujme data ve tvaru dvojic $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak minimalizace výrazu

$$\sum_{i=1}^{k} |ax_i + b - y_i|^2$$

odpovídá aproximaci řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

Hledaná dvojice (a, b) se najde jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čili

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k x_i^2 & \sum_{i=1}^k x_i \\ \sum_{i=1}^k x_i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k x_i y_i \\ \sum_{i=1}^k y_i \end{pmatrix}$$

Unitární operátor

Následující jednoduché zobecnění Pythagorovy věty formulujeme pod názvem, pod nímž je známo v teorii Fourierových řad:

Lemma (Parsevalova rovnost). *Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $M = \{v_i\}$ jeho ortonormální báze, $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$. Pak $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$.*

Důkaz. Stačí dosadit do definic

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{x}_j (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

□

Operátor $\mathbb{U} : V \to V$ je **unitární**, pokud zachovává normy vektorů: $\forall v \in V$, $\|\mathbb{U}v\| = \|v\|$. Další možné charakterizace unitárních operátorů shrnuje následující věta:

Věta. *Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $M = \{v_i\}_1^n \subset V$ ortonormální báze, $\mathbb{U} : V \to V$ je operátor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) *$\mathbb{U}$ je unitární operátor.*
(2) $\forall w_1, w_2 \in V$, $(\mathbb{U}w_1, \mathbb{U}w_2) = (w_1, w_2)$
(3) $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{1}_V$.
(4) *$U := (\mathbb{U})_{MM}$ je unitární matice, tedy $U^+U = UU^+ = E$.*
(5) *Řádky i sloupce matice U tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.*
(6) *$\{\mathbb{U}v_i\}_1^n$ je ortonormální báze V.*

Důkaz. 1) $\Leftrightarrow$ 2) plyne z polarizační identity, 2) $\Leftrightarrow$ 3) z definice adjungovaného operátoru, 3) $\Leftrightarrow$ 4) z vlastností matice adjungovaného operátoru, pro 4) $\Leftrightarrow$ 5) si stačí uvědomit, že součin UU^+ lze chápat jako počítání skalárních součinů řádků U mezi sebou, podobně pro U^+U a sloupce. Tvrzení 6) plyne z 2) a naopak z 6) vyplývá 1) pomocí Parsevalovy rovnosti. □

Pokud $\mathbb{U}$ je unitární operátor, M ortonormální báze a M' báze $\{\mathbb{U}v_i\}_1^n$ z šestého bodu, pak je matice $(\mathbb{U})_{M'M}$ jednotková. Podle čtvrtého bodu pak platí

$$U \equiv (\mathbb{U})_{MM} = (\mathbb{1}_V)_{MM'}(\mathbb{U})_{M'M} = (\mathbb{1}_V)_{MM'},$$

tedy matice přechodu od M k M' je stejná jako matice unitárního operátoru, který převádí M na M'. Tím znovu dostáváme výsledek z minulého semestru, že matice přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi je unitární. Protože pro unitární matici platí $U^+ = U^{-1}$, platí pro transformaci matice operátoru $\mathbb{A} : V \to V$ při přechodu od jedné ortonormální báze ke druhé vztah

$$A' \equiv (\mathbb{A})_{M'M'} = (\mathbb{1})_{M'M}(\mathbb{A})_{MM}(\mathbb{1})_{MM'} = U^+AU,$$

kde U je matice přechodu od M k M'.

Snadno se ověří, že množina všech unitárních operátorů na V je grupa vzhledem ke skládání operátorů, totéž pro unitární matice vzhledem k operaci násobení matic. Ze čtvrtého bodu věty plyne, že pro každý unitární operátor platí $|\det \mathbb{U}| = 1$.

Poznámka. Reálná unitární matice splňuje $U^{-1} = U^T$, nazývá se pak maticí **ortogonální**.

Spektrum samosdružených operátorů

Věta (Schurova reprezentace operátoru)**.** *Pro každý operátor $\mathbb{A} : V \to V$ existuje ortonormální báze, vzhledem k níž je jeho matice horní trojúhelníková.*

Kdybychom nepožadovali ortonormalitu, stačilo by se odvolat na větu o Jordanově tvaru

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle dimenze V. Případ $\dim V = 1$ je triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny operátory na prostorech dimenze $n-1$, nechť V má dimenzi n a $\mathbb{A}$ má vlastní vektor u s vlastním číslem λ, lze předpokládat $\|u\| = 1$. Označme $W = \langle u\rangle^\perp$ a zvolme nějakou ortonormální bázi M ve W. Pak vzhledem k bázi $\{u\} \cup M$ má matice operátoru $\mathbb{A}$ blokový tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

kde B je matice $(n-1)\times(n-1)$ a $x \in \mathbb{C}^{n-1}$. Matice B definuje operátor $\mathbb{B} : W \to W$ a podle indukčního předpokladu existuje ve W ortonormální báze M', vzhledem k níž je matice

$$B' := (\mathbb{B})_{M'M'} = (\mathbb{1}_W)_{M'M}(\mathbb{B})_{MM}(\mathbb{1}_W)_{MM'} = U^+BU$$

operátoru $\mathbb{B}$ horní trojúhelníková. Matice operátoru $\mathbb{A}$ vzhledem k $\{u\} \cup M'$ pak je

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & xU \\ 0 & U^+BU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & xU \\ 0 & B' \end{pmatrix},$$

což je horní trojúhelníková matice. Báze $\{u\} \cup M'$ je hledanou ortonormální bází ve V. □

Důsledek. *$\mathbb{A} : V \to V$ je samosdružený operátor, právě když existuje ortonormální báze, vzhledem k níž je matice operátoru $\mathbb{A}$ diagonální a reálná.*

Důkaz. Nechť $\mathbb{A}$ je samosdružený operátor. Pak horní trojúhelníková matice A' v důkazu předchozí věty je zároveň hermitovská, musí tedy být diagonální s reálnými hodnotami na diagonále. Naopak, pokud D je diagonální a reálná, pak $D = D^+$ a tedy i $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$. □

Poznámka. Důsledek lze přeformulovat i tak, že samosdružený operátor má bázi z vlastních vektorů a všechna jeho vlastní čísla jsou reálná. První tvrzení lze dokázat i nezávisle. Pokud v je vlastní vektor $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$ s vlastním číslem λ, pak

$$\lambda \|v\|^2 = (\mathbb{A}v, v) = (v, \mathbb{A}^* v) = (v, \mathbb{A}v) = \bar{\lambda}\|v\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

Rovněž kolmost vlastních vektorů u a v operátoru $\mathbb{A}$ vzhledem ke dvěma různým vlastním číslům $\mu \neq \lambda$ je na jeden řádek:

$$\lambda(u, v) = (\mathbb{A}u, v) = (u, \mathbb{A}v) = \bar{\mu}(u, v) = \mu(u, v) \Rightarrow (u, v) = 0$$

Příklad. Proveďme unitární diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla jsou 4 a -2, druhé z nich je dvojnásobné. Příslušné vlastní podprostory jsou $\langle(1, 1, 1)\rangle$ a $\langle(1, -1, 0), (0, 1, -1)\rangle$, vidíme, že jsou skutečně navzájem kolmé. Ve druhém z nich pomocí Gramovy-Schmidtovy metody najdeme ortogonální bázi $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$. V předpisu pro diagonalizaci $A = UDU^+$ je matice U přechodu od kanonické báze do báze z vlastních vektorů unitární, její sloupce tedy tvoří normalizované vlastní vektory. V tomto případě, kdy bylo možné vzít všechny vlastní vektory reálné, je $U^+ = U^T$, tedy U je ortogonální matice. Celkově máme

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Příklad. Operátor, který má vzhledem k ortonormální bázi $\{u_i\}_1^n$ matici

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E_k je jednotková matice stupně $k \leq n$, zobrazuje vektor na jeho ortogonální projekci do lineárního obalu prvních k vektorů báze. Pro každou ortogonální projekci $\mathbb{P}_W : V \to W$ na podprostor $W \leq V$ můžeme takovou bázi najít, stačí vzít libovolnou ortonormální bázi W a doplnit ji na ortonormální bázi V. Tedy $\mathbb{P}_W$ je samosdružený operátor, který splňuje $\operatorname{Im} \mathbb{P}_W = 0$ a $(\mathbb{P}_W)^2 = \mathbb{P}_W$. Zároveň ho tyto tři podmínky jednoznačně charakterizují.

Věta (Spektrální rozklad samosdruženého operátoru)**.** *Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je samosdružený operátor, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ množina jeho vlastních čísel, $\mathbb{P}_\lambda : V \to V$*

operátor ortogonální projekce na vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ. Pak lze operátor zapsat jako

$$\mathbb{A} = \lambda_1 \mathbb{P}_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_k \mathbb{P}_{\lambda_k}$$

Důkaz. Nechť $\{u_i\}_1^n$ je ortonormální báze, vzhledem k níž má $\mathbb{A}$ diagonální matici. Vektor u_i je vlastním vektorem $\mathbb{A}$ s vlastním číslem $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, takže $\mathbb{P}_\lambda u_i = u_i$ a $\mathbb{P}_\mu u_i = 0$, pokud $\mu \neq \lambda$. Pravá i levá strana rovnosti tedy mají na u_i hodnotu λu_i, rovnají se proto na bázi a tudíž i jako operátory. □

Pokud $\lambda \neq \mu$, platí $\mathbb{P}_\lambda \mathbb{P}_\mu = 0$, tedy

$$\mathbb{A}^2 = (\lambda_1 \mathbb{P}_{\lambda_1} + \ldots + \lambda_k \mathbb{P}_{\lambda_k})^2 = (\lambda_1)^2 \mathbb{P}_{\lambda_1} + \ldots + (\lambda_k)^2 \mathbb{P}_{\lambda_k}$$

To můžeme zobecnit na libovolnou mocninu, potažmo polynom nebo mocninnou řadu. Je proto přirozené definovat pro libovolnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ samosdružený operátor

$$f(\mathbb{A}) = f(\lambda_1)\mathbb{P}_{\lambda_1} + \ldots + f(\lambda_k)\mathbb{P}_{\lambda_k}$$

Vidíme, že $f(\mathbb{A})$ závisí pouze na hodnotě f v bodech spektra operátoru $\mathbb{A}$. Toho lze využít k výpočtu funkcí operátorů bez nutnosti hledat vlastní vektory:

Příklad. Druhá odmocnina matice

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -15 \\ 10 & -6 \end{pmatrix},$$

která má vlastní čísla 4 a 9, je rovna $p(A)$, kde p je jakákoli funkce, pro kterou $p(4) = 2$, $p(9) = 3$. To samozřejmě splňuje odmocnina, ale například také lineární funkce $p(x) = \frac{1}{5}(x + 6)$. Tedy

$$p(A) = \frac{1}{5}(A + 6E) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je odmocnina z A, jak můžeme ověřit přímým výpočtem.

Definice. Operátor $\mathbb{N} : V \to V$ se nazývá **normální**, pakliže komutuje se svým adjungovaným operátorem, tedy $\mathbb{N}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}\mathbb{N}^*$. **Normální matice** je taková, pro niž $N^+N = NN^+$.

Pasáž o normálních operátorech je bonusová.

Je vidět, že pojem normálního operátoru zahrnuje jak operátory unitární, tak samosdružené. Věta o diagonalizaci samosdruženého operátoru se dá zobecnit právě na normální operátory:

Věta. *Každý normální operátor má ortonormální bázi z vlastních vektorů.*

Poznámka. Ekvivalentně lze říct též, že pro každou normální matici N existuje unitární matice U a diagonální matice D, že $N = UDU^+$. Pokud D je reálná, pak $D = D^+$ a

$$N^+ = (UDU^+)^+ = (U^+)^+ D^+ U^+ = UDU^+ = N,$$

tedy N je hermitovská. Jinými slovy, normální operátor má reálné vlastní hodnoty právě když je samosdružený.

Důkaz. Vzhledem k větě o Schurově reprezentaci operátoru stačí ukázat, že každá normální horní trojúhelníková matice je diagonální. Pro matice 1×1 je to jasné, předpokládejme, že to platí pro všechny matice až do stupně $(n-1) \times (n-1)$. Zapišme horní trojúhelníkovou $n \times n$ matici N a její hermitovské sdružení blokově jako

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix}, N^+ = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix},$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in M_{1,n-1}(\mathbb{C})$ a $M \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$ Podmínka normality matice N se přepíše jako rovnost matic

$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \bar{\lambda}x \\ \lambda x^+ & x^+x + M^+M \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ x^+ & M^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + x^+x & xM^+ \\ Mx^+ & MM^+ \end{pmatrix}$$

Porovnáním levého horního rohu vidíme, že $0 = x^+x \equiv \sum_1^{n-1} |x_{1,i}|^2$, tedy $x = 0$. Pak ale $M^+M = MM^+$, tedy M je normální horní trojúhelníková matice, ta je podle indukčního předpokladu je diagonální, tedy N je diagonální. □

Věta (Spektrální rozklad normálního operátoru)**.** *Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je normální operátor, $\mathbb{P}_\lambda : V \to V$ operátor ortogonální projekce na vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ. Pak lze operátor zapsat jako spektrální rozklad*

$$\mathbb{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \lambda \mathbb{P}_\lambda$$

Důkaz je stejný jako pro spektrální rozklad samosdruženého operátoru.

Věta. *Operátor $\mathbb{N} : V \to V$ je normální, právě když $\forall v \in V$ platí $\|\mathbb{N}v\| = \|\mathbb{N}^*v\|$.*

Důkaz. Pokud $\mathbb{N}$ je normální, pak

$$\|\mathbb{N}v\|^2 = (\mathbb{N}v, \mathbb{N}v) = (v, \mathbb{N}^*\mathbb{N}v) = (v, \mathbb{N}\mathbb{N}^*v) = (\mathbb{N}^*v, \mathbb{N}^*v) = \|\mathbb{N}^*v\|^2$$

Naopak, s využitím polarizační identity platí $\forall u, v \in V$

$$(u, \mathbb{N}^*\mathbb{N}v) = (\mathbb{N}u, \mathbb{N}v) = (\mathbb{N}^*u, \mathbb{N}^*v) = (u, \mathbb{N}\mathbb{N}^*v),$$

z čehož plyne normalita $\mathbb{N}$. □

Polární rozklad operátoru

Definice. Samosdružený operátor $A : V \to V$ nazýváme **pozitivně definitní**, resp. **pozitivně semidefinitní**, pakliže pro každý nenulový $v \in V$ je

$$(\mathbb{A}v, v) > 0, \text{ resp. } (\mathbb{A}v, v) \geq 0,$$

značíme $\mathbb{A} > 0$, resp. $\mathbb{A} \geq 0$. Analogicky definujeme pojem **negativně (semi)definitního operátoru**. Všechny ostatní operátory nazýváme **indefinitní**. **Signaturou** samosdruženého operátoru označujeme trojici čísel (p, q, n), kde p je počet kladných vlastních čísel $\mathbb{A}$ včetně násobností, q počet záporných vlastních čísel a n násobnost nuly jakožto vlastního čísla.

Poznámka. Všechny tyto pojmy budeme používat i v souvislosti s maticemi. Zavedeme je také pro hermitovské seskvilineární formy. Souvislost je zřejmá: pokud g je hermitovská seskvilineární forma, pak je její matice hermitovská a odpovídá tedy samosdruženému operátoru $\mathbb{A}$ předpisem

$$g(u, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i \bar{v}_j = (\mathbb{A}u, v),$$

kde u_i, v_j jsou souřadnice u, v vzhledem k nějaké ortonormální bázi M a a_{ij} je jak matice formy g, tak operátoru $\mathbb{A}$ vzhledem k této bázi.

Z věty o diagonalizaci samosdruženého operátoru je zřejmá souvislost mezi definovanými pojmy a vlastními čísly operátoru. Signatura má tvar

- $(p, 0, 0)$ pro pozitivně definitní operátor
- $(p, 0, n)$ pro pozitivně semidefinitní operátor
- $(0, q, 0)$ pro negativně definitní operátor

- $(0, q, n)$ pro negativně semidefinitní operátor
- $(p, q, 0)$ pro regulární indefinitní operátor
- (p, q, n) pro singulární indefinitní operátor,

přičemž všechny vyznačené hodnoty p, q, n se rozumí nenulové.

Věta. *Nechť $\mathbb{A} \geq 0$ je pozitivně semidefinitní operátor. Pak existuje právě jeden pozitivně semidefinitní operátor $\sqrt{\mathbb{A}}$, který splňuje $(\sqrt{\mathbb{A}})^2 = \mathbb{A}$.*

Důkaz. Operátor $\mathbb{A}$ má vzhledem k ortonormální bázi M diagonální matici $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s nezápornými elementy, lze předpokládat $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Definujme $\sqrt{\mathbb{A}}$ jako operátor, který má vzhledem k M matici $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Je zřejmé, že $\sqrt{\mathbb{A}}$ má požadované vlastnosti.

Ukažme ještě jednoznačnost. Pokud $\mathbb{B}$ je pozitivně semidefinitní operátor splňující $\mathbb{B}^2 = \mathbb{A}$, pak lze najít bázi M', vzhledem k níž má $\mathbb{B}$ matici $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ s nezápornými elementy, opět předpokládejme $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$. Pak ale má $\mathbb{A}$ vzhledem k této bázi matici $\operatorname{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$, tedy vlastní podprostory $\mathbb{B}$ a $\mathbb{A}$, a tedy i $\sqrt{\mathbb{A}}$ se shodují a pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\mu_i^2 = \lambda_i$. Tedy $\mathbb{B} = \sqrt{\mathbb{A}}$. □

Definice. Nechť $\mathbb{A} : V \to W$ je operátor. **Modulem** operátoru $\mathbb{A}$ rozumíme pozitivně semidefinitní operátor $|\mathbb{A}| := \sqrt{\mathbb{A}^*\mathbb{A}} : V \to V$.

Definice je korektní, neboť $\mathbb{A}^*\mathbb{A} = (\mathbb{A}^*\mathbb{A})^*$ a $(v, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v) = \|\mathbb{A}v\|^2$ je vždy nezáporné číslo. Platí

$$\||\mathbb{A}|v\|^2 = (|\mathbb{A}|v, |\mathbb{A}|v) = (v, |\mathbb{A}|^2 v) = (v, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v) = \|\mathbb{A}v\|^2$$

a tedy i $\operatorname{Ker} \mathbb{A} = \operatorname{Ker} |\mathbb{A}|$ a $\dim \operatorname{Im} \mathbb{A} = \dim \operatorname{Im} |\mathbb{A}|$.

Věta (Polární rozklad operátoru)**.** *Nechť $\mathbb{A} : V \to V$ je operátor. Pak existuje unitární operátor $\mathbb{U} : V \to V$ takový, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}|\mathbb{A}|$.*

Důkaz. Zkonstruujeme operátor $\mathbb{U}$ nejprve na $\operatorname{Im} |\mathbb{A}|$. Nechť $|\mathbb{A}|v = w$, definujeme $\mathbb{U}w = \mathbb{A}v$. To je korektní definice, protože pro jiný vektor $v' \in V$ splňující $|\mathbb{A}|v' = w$ je $v - v' \in \operatorname{Ker} |\mathbb{A}| = \operatorname{Ker} \mathbb{A}$, a tedy $\mathbb{A}v' = \mathbb{A}v = \mathbb{U}w$. Je zřejmé, že $\mathbb{U}$ je lineární zobrazení na $\operatorname{Im} |\mathbb{A}|$. Platí

$$\|\mathbb{U}w\|^2 = \|\mathbb{U}|\mathbb{A}|v\|^2 = \|\mathbb{A}v\|^2 = \||\mathbb{A}|v\|^2 = \|w\|^2$$

Zbývá předepsat operátor $\mathbb{U}$ na $(\operatorname{Im} |\mathbb{A}|)^\perp$. Prostory $\operatorname{Im} |\mathbb{A}|$ a $\operatorname{Im} \mathbb{A}$ mají stejnou dimenzi, stejně tak jejich ortogonální doplňky. Zvolme $\{u_i\} \subset (\operatorname{Im} |\mathbb{A}|)^\perp$, $\{v_i\} \subset (\operatorname{Im} \mathbb{A})^\perp$ ortonormální báze a definujme $\forall i$, $\mathbb{U}u_i = v_i$. Tím je definován na celém V unitární operátor, který zjevně splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{U}|\mathbb{A}|$. □

Z důkazu je vidět, že je operátor $\mathbb{U}$ definován jednoznačně pouze pokud je $\mathbb{A}$ na.

Polární rozklad 1×1 komplexní „matice“ z je $z = e^{i\phi}|z|$. I ve vyšších dimenzích se jedná o rozdělení lineární transformace na složku dilatační a složku rotační.

Singulární rozklad operátoru

Definice. Singulárními hodnotami operátoru $\mathbb{A} : V \to W$ rozumíme kladná vlastní čísla jeho modulu $|\mathbb{A}|$.

Věta. *Nechť $\mathbb{A} : V \to W$ je operátor se singulárními hodnotami $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Pak existují ortonormální báze ve V a W, vzhledem k nimž má $\mathbb{A}$ matici*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$.

Důkaz. Pro samosdružený operátor $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ existuje ortonormální báze $\{v_i\}_1^n \subset V$ taková, že $\mathbb{A}^*\mathbb{A}v_i = \sigma_i^2 v_i$ pro $i \in \{1,\dots,n\}$, kde $\sigma_i = 0$ pro $i > k$. Pro $i > k$ je $\mathbb{A}v_i = 0$, protože

$$\|\mathbb{A}v_i\|^2 = (\mathbb{A}^*\mathbb{A}v_i, v_i) = (0, v_i) = 0$$

Pro $i \leq k$ definujme $u_i := \frac{1}{\sigma_i}\mathbb{A}v_i$. Platí

$$(u_i, u_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(\mathbb{A}v_i, \mathbb{A}v_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(v_i, \mathbb{A}^*\mathbb{A}v_j) = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

Doplňme $\{u_i\}_1^k$ na ortonormální bázi $\{u_i\}_1^m \subset W$. Množiny $\{v_i\}_1^n$ a $\{u_i\}_1^m$ jsou hledané báze. □

Poznámky:

(1) Maticová formulace: Každou matici lze zapsat jako $A = P\Sigma Q^+$, kde P, Q jsou unitární matice a Σ je matice z tvrzení.
(2) Pokud je matice A reálná, je reálná i A^+A a tedy i matice Q složená z vlastních vektorů A^+A (která má reálná vlastní čísla). Matice P a Q jsou pak ortogonální.
(3) Známe-li singulární rozklad čtvercové matice A, můžeme získat rozklad polární:
$$A = P\Sigma Q^+ = (PQ^+)Q\Sigma Q^+ = U|A|$$
Z toho plyne, že reálná matice má reálný také polární rozklad.
(4) Problém hledání aproximativního řešení soustavy rovnic $Ax = b$, kde $b \notin \operatorname{Im} A$ vede na řešení soustavy $A^+Ax = A^+b$. To se pomocí singulárního rozkladu přepíše na
$$\Sigma^2 Q^+ x = \Sigma P^+ b$$
Pokud $h(\Sigma) = k$ a $(x)_k$ označuje vektor v $\mathbb{C}^k$ sestávající z prvních k souřadnic vektoru x, můžeme rovnici vyjádřit jako
$$(Q^+x)_k = \sigma^{-1}(P^+b)_k$$
Hledané x tedy můžeme získat tak, že určíme prvních k-složek Q^+x z rovnice, zbylých $n-k$ složek Q^+x libovolně a aplikujeme Q. Zvolíme-li poslední složky jako nulové, bude mít Q^+x a tedy i x nejmenší možnou normu. Pak lze psát aproximativní řešení rovnice $Ax = b$ s minimální normou jako $x = A^\dagger b$, kde
$$A^\dagger = Q \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^+ b$$
Matici $A^\dagger$ se říká (Mooreova-Penroseova) **pseudoinverzní matice** k matici A.

Věta (Mooreova-Penroseova pseudoinverze)**.** *Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je matice. Pak existuje jednoznačně určená matice A_0, která splňuje*

(1) $AA_0A = A$
(2) $A_0AA_0 = A_0$
(3) *A_0A a AA_0 jsou hermitovské matice.*

Navíc $A_0 = A^\dagger$. Nechť $b \in \mathbb{C}^m$, označme $x_0 := A^\dagger b$. Pak $\forall x \in \mathbb{C}^n$

$$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$$

a pokud nastane rovnost, pak $\|x_0\| \leq \|x\|$.

Důkaz. Snadno se ověří, že $A^\dagger$ má požadované vlastnosti. Naopak, pokud A_0 je matice splňující podmínky a $P\Sigma Q^+$ singulární rozklad A, zapišme

$$QA_0P^+ = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix},$$

přičemž bloková struktura je stejná jako u Σ. Postupnou aplikací první, třetí a druhé podmínky zjistíme, že $R = \sigma^{-1}$ a S, T i U jsou nulové, detaily přenecháváme čtenáři. Tedy $A_0 = A^\dagger$. Druhou část věty jsme již dokázali v poznámce výše. $\square$

Operátorová norma

Uzavřenou jednotkovou koulí $B \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu všech vektorů splňujících $\|x\| \leq 1$. Pokud $A \in M_{nn}(\mathbb{R}^n)$ je pozitivně definitní diagonální matice $A = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, pak $A(B)$ jednotkové koule je množina

$$\left\{(y_1, \ldots, y_n) | \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{y_n^2}{\sigma_n^2} \leq 1\right\},$$

čili elipsoid s poloosami σ_i. Hlavní osy elipsoidu leží v osách souřadnic.

Pro obecnou matici $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ není situace příliš odlišná. Matice $Q^+ \equiv Q^T$ v singulárním rozkladu $A = P\Sigma Q^+$ je regulární a zachovává normu, převádí tedy jednotkovou kouli samu na sebe. Matice Σ ji převede na elipsoid v $\mathbb{R}^m$, který ve skutečnosti leží v $\mathbb{R}^k$, pokud má Σ hodnost $h(\sigma) = k$. Matice P „pootočí“ tento elipsoid tak, že má nyní osy podél vektorů sloupců matice P, velikosti poloos se nezmění. Největší singulární hodnota σ_1 udává maximální prodloužení, které matice s nějakým vektorem provede.

Definice. Nechť $\mathbb{A} : V \to W$ je operátor. Veličina

$$\|\mathbb{A}\| := \max\{\|\mathbb{A}v\| | v \in V, \|v\| \leq 1\}$$

se nazývá **operátorová norma** operátoru $\mathbb{A}$.

Lemma. *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{A}' : V \to W$, $\mathbb{B} : W \to X$ jsou operátory, $\alpha \in \mathbb{C}$. Pak*

(1) $\|\mathbb{A}\|$ *je nejmenší číslo C takové, že $\forall v \in V$ platí $\|\mathbb{A}v\| \leq C\|v\|$*
(2) $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\|\mathbb{A}\|$
(3) $\|\mathbb{A} + \mathbb{A}'\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{A}'\|$
(4) $\|\mathbb{A}\| \geq 0$, *přičemž rovnost nastává pouze pro $\mathbb{A} = 0$.*
(5) $\|\mathbb{B}\mathbb{A}\| \leq \|\mathbb{B}\|\|\mathbb{A}\|$

Důkaz. Z definice plyne, že $\forall v \in V$ je $\|\mathbb{A}\frac{v}{\|v\|}\| \leq \|\mathbb{A}\|$, tedy $\|\mathbb{A}v\| \leq \|\mathbb{A}\|\|v\|$. Naopak, pokud $v_0 \in V$, $\|v_0\| \leq 1$ je vektor, pro který $\|\mathbb{A}v_0\|$ dosahuje maxima $\|\mathbb{A}\|$, pak musí být $\|v_0\| = 1$, čili $\|\mathbb{A}v_0\| = \|\mathbb{A}\|\|v_0\|$. Tím je dokázáno první tvrzení. Druhé z něj snadno plyne. Použitím trojúhelníkové nerovnosti a prvního tvrzení dostáváme

$$\|(\mathbb{A} + \mathbb{A}')v\| \leq \|\mathbb{A}v\| + \|\mathbb{A}'v\| \leq \|\mathbb{A}\|\|v\| + \|\mathbb{A}'\|\|v\| = (\|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{A}'\|)\|v\|,$$

čili podle prvního tvrzení $\|\mathbb{A} + \mathbb{A}'\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{A}'\|$. Čtvrté tvrzení plyne snadno z prvního a páté také díky

$$\|\mathbb{B}\mathbb{A}v\| \leq \|\mathbb{B}\|\|\mathbb{A}v\| \leq \|\mathbb{B}\|\|\mathbb{A}\|\|v\|$$

$\square$

Poznámka. První tvrzení je vlastně ekvivalentní definice operátorové normy, v této podobě funguje i na prostorech nekonečné dimenze (operátor, který má konečnou normu, se tam nazývá **omezený**). Proto také dokazujeme zbylé vlastnosti pomocí této ekvivalentní definice, i když by to šlo i třeba z faktu, že $\|\mathbb{A}\|$ je největší singulární hodnota. Tvrzení 2 až 4 ověřují, že $\|\cdot\|$ je opravdu norma. Multiplikativita v pátém tvrzení je vlastnost, která zvýhodňuje operátorovou normu oproti ostatním normám na maticích, srovnejte s poznámkou za definicí exponenciály.

Nechť A je regulární $n \times n$ matice, jejíž největší a nejmenší singulární hodnoty jsou σ_1 a σ_n, $b \in \mathbb{C}^n$ je nenulový vektor. Jak se změní řešení $x = A^{-1}b$, pokud b změníme na $b + \delta b$? Nové řešení $x + \delta x$ se liší o $A^{-1}\delta b$. Pak

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\delta b\|}{\|b\|}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Tedy relativní změna pravé strany se na relativní změně řešení projeví faktorem, který je roven poměru největší a nejmenší singulární hodnoty. Tomuto číslu se říká **podmíněnost matice** $\mathbb{A}$. Ze singulárního rozkladu se snadno ukáže, že existuje pravá strana b a perturbace δb, pro něž nastane rovnost, odhad je tedy nejlepší možný. Matice, které mají podmíněnost „velkou“ se nazývají **špatně podmíněné**, znamená to, že při numerickém výpočtu mohou mít zaokrouhovací chyby v zadání velký vliv na hodnotu řešení.

Kvadratické formy

V tomto oddíle budeme předpokládat, že všechny vektorové prostory jsou reálné a konečnědimenzionální.

Definice. Nechť $g : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. **Kvadratická forma** příslušná g je zobrazení $Q_g : V \to \mathbb{R}$ definované předpisem $Q_g(v) = g(v, v)$. **Signaturou**, resp. **maticí kvadratické formy** rozumíme signaturu, resp. matici příslušné formy bilineární. **Nulovou množinou** kvadratické formy Q_g rozumíme všechny vektory $v \in V$, pro něž $Q_g(v) = 0$. **Polární bází** rozumíme bázi prostoru V, vzhledem k níž má matice kvadratické formy diagonální tvar.

Poznámky:

(1) Ze znalosti kvadratické formy můžeme zrekonstruovat příslušnou symetrickou bilineární formu polarizační identitou

$$g(v, w) = \frac{1}{2}\left(Q_g(v + w) - Q_g(v) - Q_g(w)\right)$$

Tedy symetrické bilineární a kvadratické formy jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci.

(2) Spolu se signaturou máme pro kvadratické formy definovány i pojmy indefinitní a pozitivně/negativně (semi)definitní.

(3) Pokud je g skalární součin, pak $Q_g(v) = \|v\|_g^2$.

Věta. *Nechť Q je kvadratická forma na V. Pak má polární bázi.*

Důkaz. Nechť $Q = Q_g$. Budeme postupovat indukcí podle dimenze V. Pro $\dim V = 1$ není co dokazovat, předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny prostory dimenze menší než n a že V má dimenzi n. Pro $g = 0$ není co dokazovat. Pro $g \neq 0$ je i $Q_g \neq 0$, vyberme vektor u_1 tak, aby $Q_g(u_1) \neq 0$ a doplňme jej na bázi $M = \{u_i\}_1^n$. Pokud $M' = \{u_i'\}_1^n$ je další báze V, pak platí $\forall v, w \in V$

$$g(v, w) = x^T G y = x'^T R^T G R y',$$

kde x, y, resp. x', y' jsou sloupcové vektory souřadnic vektorů v, w vzhledem k M, resp. M', G je matice g vzhledem k M a R je matice přechodu od M k M'. Ze vztahu vyplývá, že $G' := R^T G R$ je matice g vzhledem k M'. Chceme najít R takové, aby G' byla diagonální.

Volme nejprve matici přechodu ve speciálním tvaru a pišme blokově

$$G_1 := R_1^T G R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & h^T \\ h & \tilde{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^T \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & r^T g_{11} + h^T \\ r g_{11} + h & \tilde{G}' \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{G}' := \tilde{G} + rh^T + hr^T + g_{11}rr^T$ je symetrická matice. Protože $g_{11} = Q_g(u_1) \neq 0$, můžeme volbou $r = -\frac{1}{g_{11}}h$ zajistit, že G' bude blokově diagonální. Podle indukčního předpokladu existuje matice $\tilde{R}$, že $\tilde{R}^T\tilde{G}'\tilde{R}$ je diagonální. Pak ale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{R}^T \end{pmatrix} R_1^T G R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$$

je hledaná diagonální G'. □

Příklad. Diagonalizujme kvadratickou formu $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ na $\mathbb{R}^2$. Příslušná symetrická bilineární forma je

$$g(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$$

Vzhledem ke kanonické bázi má forma matici

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Chceme najít matici S takovou, že SGS^T je diagonální ($S = R^T$ z důkazu). Element g_{11} je nenulový, můžeme tedy jako v důkazu volit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

To je vlastně matice řádkové úpravy, která do druhého řádku matice G přičte (-2)-násobek prvního řádku. Násobení maticí S^T zprava je pak odpovídající sloupcová úprava, která do druhého sloupce matice SG přičte (-2)-násobek prvního sloupce. Mluvíme proto o metodě diagonalizace **symetrickými úpravami**. Výsledná matice je

$$SGS^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že sloupcová část úpravy už jenom vynulovala prvek na pozici 12 a prvek na pozici 22 zůstal zachován. Pokud by G byla matice typu $n \times n$, pak by S zahrnovala všechny řádkové úpravy nulující první sloupec pod pivotem a následná aplikace S^T zprava by na $n-1 \times n-1$ blok $\tilde{G}$ neměla vliv, pouze by dopsala nuly do prvního řádku. Podobně jako v Gaussově eliminaci by se pak algoritmus aplikoval na blok $\tilde{G}$.

Komplikace může nastat, když $g_{11} = 0$, jako u kvadratické formy $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ na $\mathbb{R}^3$, jejíž matice je

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hledáme matici S takovou, aby SGS^T byla diagonální ($S = R^T$ v důkazu). Pak je nejsnazší provést symetrickou úpravu, která G převede na matici, v níž už je pivot nenulový. Zde například přičtení druhého řádku do prvního a následné přičtení druhého sloupce do prvního vede na matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kterou jsme pak už normálně diagonalizovali. Poslední symetrická úprava je násobení druhého řádku a sloupce dvojkou. Všimněte si, že taková úprava zachovává znaménko prvku na diagonále.

Obvykle chceme znát i bázi, v níž je matice formy diagonální, tedy matici S, jejíž *řádky* jsou souřadnicemi nové báze vzhledem ke staré. Používá se podobný trik jako při výpočtu inverzní matice, tedy rozšíření matice formy o pravou stranu, která je za začátku jednotkovou maticí a do níž se zaznamenávají pouze řádkové úpravy (jinak bychom skončili s maticí SS^T). Pro první formu z tohoto příkladu vypadá takový výpočet

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Hledaná báze je tedy $\{(1,0),(-2,1)\}$.

Věta. *Nechť Q je kvadratická forma na prostoru V se skalárním součinem. Pak existuje polární báze Q, která je zároveň ortonormální.*

Důkaz. Nechť $Q = Q_g$, $M = \{u_i\}_1^n$ je ortonormální báze a G je matice g vzhledem k M. Matice G je symetrická a tedy existuje ortogonální matice R taková, že $R^T GR$ je diagonální. Matice R je maticí přechodu od ortonormální báze M k jiné ortonormální bázi $M' = \{u_i'\}_1^n$ a $R^T GR$ je matice Q vzhledem k M'. Tedy M' je hledaná báze. □

Ortogonální diagonalizace kvadratických forem tedy využívá ortogonalitu vlastních vektorů symetrických matic. Vzniklá polární báze sestává z vlastních vektorů a vzhledem k této bázi má matice formy na diagonále vlastní čísla. Signaturu kvadratické formy pak určíme přímo z definice. Výpočet vlastních čísel je ale z početního hlediska velmi náročná úloha, kterou většinou umíme vyřešit jen přibližně. Proto má smysl umět i jiné metody (neortogonální) diagonalizace a přesvědčit se, že se pomocí nich dá signatura spočítat také. K tomu nám poslouží následující geometrická charakterizace signatury:

Lemma. *Nechť D je diagonální matice se signaturou (p,q,n), $p+q+n=m$. Pak p je maximální dimenze podprostoru v $\mathbb{R}^m$, na němž je D pozitivně definitní a q je maximální dimenze podprostoru v $\mathbb{R}^m$, na němž je D negativně definitní.*

Důkaz. Označme $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $Q(x) = x^T Dx$ a předpokládejme, že prvních p čísel λ_i je kladných, dalších q záporných a posledních n jsou nuly. Lineární obal prvních p vektorů kanonické báze označme W. Je zřejmé, že Q je na W pozitivně definitní. Nechť W' je jiný podprostor, na němž je Q pozitivně definitní. Definujme lineární zobrazení $f : W' \to W$ předpisem

$$f((x_1,\dots,x_m)) = (x_1,\dots,x_p,0\dots,0)$$

Pokud $x \in \operatorname{Ker} f$, pak $x_1 = \dots = x_p = 0$, a tedy

$$Q(x) = \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i x_i^2 \le 0$$

Protože Q je na W' pozitivně definitní a $x \in W'$, musí být $x = 0$. Tedy $\operatorname{Ker} f = 0$. Pak je ale f monomorfismus a

$$\dim W' = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f \le \dim W = p$$

Druhé tvrzení plyne z prvního pro matici $-D$. □

Signaturu kvadratické formy lze tedy ekvivalentně definovat pomocí maximálních dimenzí podprostorů, na nichž je forma pozitivně, resp. negativně definitní. Tyto dimenze se dají spočítat z každého jejího diagonálního vyjádření. Proto k určení signatury nemusíme počítat vlastní čísla, stačí použít neortogonální diagonalizaci a spočítat, kolik je na diagonále kladných a záporných čísel.

Třetí metodou, jak diagonalizovat kvadratickou formu, je užití Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace, místo skalárního součinu ale vezmeme regulární symetrickou bilineární formu g na V, kterou chceme diagonalizovat. Dva vektory $u, v \in V$ jsou na sebe **kolmé vzhledem ke** g, pokud $g(u,v) = 0$, analogicky se definuje i norma

$\|\cdot\|_g$, ortogonální doplněk a ortogonální báze vzhledem ke g. Drobnou komplikací je, že existují nenulové vektory $u \in V$, pro něž $g(u,u) = 0$, tedy vektory kolmé samy na sebe či jinak řečeno s nulovou normou. Mohou existovat také vektory se zápornou normou, ani ty nebude možné vzhledem k g normalizovat, pojem ortonormální báze vzhledem ke g tedy zavádět nebudeme.

Nechť A je matice $n \times n$. Pro $k \in \{1, \dots, n\}$ označme A_k její $k \times k$ podmatici vzniklou vyškrtnutím posledních $n-k$ řádků a sloupců.

Věta (Jacobi-Sylvesterova). *Nechť g je regulární symetrická bilineární forma na V, $M = \{u_i\}_1^n$ je báze V a A je matice g vzhledem k této bázi. Předpokládejme, že $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det A_k \neq 0$. Definujme navíc $\det A_0 = 1$. Pak existuje ve V báze $M = \{v_i\}_1^n$, $v_k = \sum_{j=1}^k r_{jk} u_j$, ortogonální vzhledem ke g, kde*

$$g(v_k, v_k) = \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}.$$

Tedy signatura g je $(p, q, 0)$, kde q je počet znaménkových změn v posloupnosti

$$\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_n$$

Důkaz. Pro $k = 1$ zvolme $v_1 = \frac{1}{a_{11}} u_1$, tedy $g(v_1, v_1) = \frac{1}{a_{11}}$. Předpokládejme, že jsme zkonstruovali vektory v_1 až v_{k-1}, tedy i matici $R_{k-1} = (r_{ij}; i, j \leq k-1)$. To je horní trojúhelníková matice s nenulovou diagonálou, je tedy regulární, proto je to matice přechodu od $\{u_i\}_1^{k-1}$ k $\{v_i\}_1^{k-1}$ v prostoru $\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$. Hledáme vektor v_k tak, aby byl kolmý na $v_1, \dots, v_{k-1}$, tedy ekvivalentně na $u_1, \dots, u_{k-1}$. To dává $k-1$ podmínek na čísla r_{1k} až r_{kk}:

$$0 = g(u_i, \sum_{i=1}^k r_{jk} u_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} r_{jk}$$

Přidejme k tomu normalizační podmínku $g(u_k, v_k) = 1$ a máme soustavu rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 1 \end{array}\right)$$

Protože $\det A_k \neq 0$, řešení existuje a je jednoznačné. Z Cramerova pravidla pak dostáváme

$$g(v_k, v_k) = g(r_{kk} u_k, v_k) = r_{kk} = \frac{\det A_{k-1}}{\det A_k}$$

□

Kvadriky

Kvadrika je množina bodů $x \in \mathbb{R}^n$ zadaná rovnicí $f(x) = 0$, kde

$$f(x) = x^T A x + 2b^T x + c.$$

Zde A je nějaká symetrická matice, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Nechť U je ortogonální matice, pro kterou $D := U^T A U$ je diagonální. Pak

$$\begin{aligned} f(x) &= x^T U D U^T x + 2b^T U U^T x + c = x'^T D x' + 2b'^T x' + c \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i (x_i')^2 + 2b_i' x_i') + c \end{aligned}$$

kde $x' = U^T x$, $b' = U^T b$ a $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Předpokládejme, že prvních k čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je nenulových, zbytek jsou nuly. Pak lze prvních k závorek doplnit na čtverec, tedy

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(x_i' + \frac{b_i'}{\lambda_i} \right)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} b_i' x_i' + \left(c - \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i^2}{\lambda_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} 2b_i' y_i + c' \end{aligned}$$

Z tohoto tvaru můžeme zjistit typ kvadriky a další informace o ní. V $\mathbb{R}^2$ mohou nastat případy

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c' < 0$ - elipsa s poloosami $\sqrt{|c'/\lambda_i|}$
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, c' \neq 0$ - hyperbola s poloosami $\sqrt{|c'/\lambda_i|}$
- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, b_2' \neq 0$ - parabola s parametrem $-\frac{b_2'}{\lambda_1}$

a vedle toho spousta dalších, kdy je řešením prázdná množina, jeden bod, přímka nebo dvojice přímek, podrobný rozbor přenecháváme čtenáři za cvičení. Elipsa a hyperbola mají v souřadnicích $y = U^T x + v$ střed v bodě $y_s = (0, 0)$, v původních souřadnicích x tedy v bodě $x_s = U(y_s - v) = -Uv$. Směry hlavních os jsou vlastní vektory matice A. Směr osy paraboly je vlastní vektor A s vlastním číslem 0. Podobně je možné postupovat ve vyšších dimenzích.

Systematický přístup ke kvadrikám spočívá v zavedení další souřadnice x_0, tedy vnořením $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^{n+1}$ pomocí $x \mapsto (x_0, x)$. Pak je možné funkci $f(x)$ chápat jako restrikci kvadratické formy

$$Q((x_0, x)) := \begin{pmatrix} x_0 & x^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$$

na množinu $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^n | x_0 = 1\}$, která se nazývá **afinní prostor** nad $\mathbb{R}^n$, a kvadriku $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ jako průnik nulové množiny kvadratické formy Q a $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Lineární zobrazení tvaru

$$U_r : \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ Ux + rx_0 \end{pmatrix}$$

zachovávají jak množinu $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, tak množinu $N = \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^n | x_0 = 0\}$, tzv. **nevlastní nadrovinu**. Afinní prostor můžeme interpretovat jako „množinu bodů“, nevlastní nadrovinu jako prostor směrových vektorů mezi nimi a U_r jako složení lineárního zobrazení, které je dáno maticí U, a posunutí o r. Pokud U je ortogonální matice, pak navíc U_r zachovává skalární součin v N, tedy i délky a úhly úseček v $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, je to proto shodnost. Zvolíme-li U tak, aby diagonalizovalo matici $A = UDU^T$, pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^T \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r^T \\ 0 & U^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + b^T r + r^T b + r^T A r & (b^T + r^T A) U \\ U^T (b + Ar) & U^T A U \end{pmatrix}$$

Omezme se na případ regulární kvadratické formy Q. Pokud je matice A také regulární, vede volba $r = -A^{-1} r$ k diagonalizaci matice celé formy Q:

$$\begin{pmatrix} c - b^T A^{-1} b & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

V závislosti na signatuře D a znaménku $c - b^T A^{-1} b$ zjistíme, zda je příslušná kvadrika elipsoid, hyperboloid nebo prázdná množina.

Pokud je A singulární, předpokládejme, že nulová vlastní čísla jdou na diagonále D jako poslední. Pak je ale vidět, že jich nemůže být víc než jedno, jinak by byly poslední dva řádky matice formy Q lineárně závislé a forma Q by nebyla regulární.

Tedy $h(A) = n - 1$. Označme $b' = U^T b$, $r' = U^T r$, $\tilde{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, $\tilde{b'} = (b'_1, \dots, b'_{n-1})$, $\tilde{r'} = (r'_1, \dots, r'_{n-1})$. Matici formy Q lze tímto označením a následnou volbou $\tilde{r'} = -\tilde{D}^{-1}\tilde{b'}$ převést na

$$\begin{pmatrix} c + b'^T r' + r'^T b + r'^T D r' & b'^T + r'^T D \\ b' + D r' & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b'_n \\ 0 & \tilde{D} & 0 \\ b'_n & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

přičemž nula na pozici 11 odpovídá volbě $r'_n = \frac{1}{2b'_n}(c - \tilde{b'}^T \tilde{D}^{-1}\tilde{b'})$. Výsledkem je matice paraboloidu, jehož typ je určen signaturou matice $\tilde{D}$ a tedy A.

Cvičení

(1) **(4)** Najděte aproximativní řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) **(4)** Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) **(4)** Proveďte ortogonální diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) **(4)** Proveďte unitární diagonalizaci matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) **(4)** Spočítejte $\sqrt{A}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(6) **(4)** Určete, pro která λ je kvadratická forma

$$f_2(u) = x_1^2 - 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$

pozitivně definitní.

(7) **(4)** Diagonalizujte následující kvadratickou formu na $\mathbb{R}^4$ pomocí symetrických úprav a uveďte matici přechodu od báze kanonické do báze polární.

$$9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8t^2 + 8yz - 4yt + 4zt$$

(8) **(4)** Proveďte ortogonální diagonalizaci kvadratické formy $7x^2 - 12xy - 2y^2$ na $\mathbb{R}^2$.

(9) **(3)** Proložte body $(-2, 4)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 0)$ přímkou.

(10) **(3)** Proložte body $(1, 1, 3)$, $(0, 3, 6)$, $(2, 1, 5)$, $(0, 0, 0)$ rovinou.

(11) **(3)** Najděte projekci na sloupcový podprostor matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

a to jednak Gramovou-Schmidtovou metodou, jednak pomocí adjungovaného zobrazení.

(12) **(3)** Proveďte unitární diagonalizaci matice
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
(13) **(3)** Proveďte ortogonální diagonalizaci matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(14) **(3)** Proveďte singulární a polární rozklad matice
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
(15) **(3)** Proveďte singulární rozklad matice
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$
(16) **(3)** Proveďte singulární rozklad matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
(17) **(3)** Určete operátorovou normu a podmíněnost matice
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$
(18) **(3)** Určete operátorovou normu a podmíněnost matice
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
(19) **(3)** Určete operátorovou normu a podmíněnost matice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
(20) **(3)** Na $\mathbb{R}^3$ pomocí Jacobi-Sylvestrovy věty určete signaturu kvadratické formy
$$Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$
(21) **(3)** Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$:
$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$$
(22) **(3)** Na $\mathbb{R}^4$ diagonalizujte kvadratickou formu
$$Q(x) = 2x_1x_2 - 4x_3x_4$$
pomocí symetrických úprav.

(23) **(3)** Najděte polární bázi následující kvadratické formy v $\mathbb{R}^3$ Gramovou-Schmidtovou metodou:
$$17x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 4xy - 4xz - 8yz$$

(24) **(3)** Diagonalizujte kvadratickou formu, jejíž matice vzhledem ke kanonické bázi je
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$
a to všemi třemi způsoby: ortogonálně, symetrickými úpravami a Gramovou-Schmidtovou metodou.

(25) **(3)** Určete kuželosečku (kvadriku) v $\mathbb{R}^2$ s rovnicí
$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 7 = 0,$$
napište její rovnici v kanonickém tvaru a vyjádření nových souřadnic pomocí starých.

(26) **(3)** Určete kuželosečku v $\mathbb{R}^2$ s rovnicí:
$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 14x - 2y - 27 = 0$$

(27) **(2)** Proložte body $(-2,4)$, $(-1,2)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$ parabolou.

(28) **(2)** Najděte ortogonální projekce na podprostory $\operatorname{Ker}\mathbb{A}$, $\operatorname{Im}\mathbb{A}$, $\operatorname{Ker}\mathbb{A}^*$, $\operatorname{Im}\mathbb{A}^*$, kde $\mathbb{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ je operátor $\mathbb{A}x = Ax$ definovaný maticí
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(29) **(2)** Proveďte ortogonální diagonalizaci matice
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
Co znamená toto zobrazení geometricky?

(30) **(2)** Nechť $\mathbb{U}$ je unitární operátor, λ jeho vlastní číslo. Dokažte, že $|\lambda| = 1$, tedy že $\lambda = e^{i\phi}$ pro nějaké reálné ϕ.

(31) **(2)** Nechť A je matice. Dokažte, že matice $E + A^+A$ je regulární.

(32) **(2)** Nechť U je unitární matice. Dokažte, že $E + \frac{1}{2}U$ je regulární.

(33) **(2)** Dokažte, že každý normální operátor, jehož všechna vlastní čísla leží na jednotkové kružnici, je unitární.

(34) **(2)** Dokažte, že pro čtvercovou matici platí $|\det A| = \det |A|$.

(35) **(2)** Nechť $\mathbb{A} : V \to V$, σ_1 je jeho největší singulární hodnota. Dokažte, že $\rho(\mathbb{A}) \leq \sigma_1$, ale rovnost obecně neplatí.

(36) **(2)** Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je matice, $k \leq h(A)$. S využitím singulárního rozkladu najděte matici A' hodnosti k takovou, aby $\|A' - A\|$ bylo co nejmenší.

(37) **(2)** Nechť B je jednotková koule v $\mathbb{R}^2$. Popište její obraz pomocí matice A, kde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(38) **(2)** Dokažte, že operátorová norma není normou žádného skalárního součinu.

(39) **(2)** Dokažte, že zobrazení $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathbb{A}^*\mathbb{B})$ je skalární součin na prostoru všech operátorů z V do W. Označme příslušnou normu $\|\cdot\|_2$. Dokažte, že pro každý operátor $\mathbb{A}$ je $\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|$.

(40) **(2)** Přepište důkaz věty o neortogonální diagonalizaci kvadratické formy pro komplexní případ.

(41) **(2)** Nechť ϕ je netriviální lineární forma na $\mathbb{R}^n$. Určete signaturu kvadratické formy dané vztahem $f_2(u) = \phi(u)^2$.

(42) **(2)** Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ dané vztahem
$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$$

(43) **(2)** Popište všechny vektory v nulové množině kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$ s maticí vzhledem ke kanonické bázi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(44) **(2)** Rozhodněte zda platí: Nechť A je pozitivně definitní matice a B je negativně semidefinitní matice stejného typu, pak $A - B$ je pozitivně definitní matice.

(45) **(2)** Nechť Q je kvadratická forma na $P^2(\mathbb{R})$ definovaná vztahem $Q(p) = \int_0^1 p^2(x)dx$. Určete bázi, vzhledem k níž má Q diagonální matici.

(46) **(2)** Přizpůsobte metodu symetrických úprav pro seskvilineární formy na komplexním prostoru, které mají hermitovskou matici (hermitovské kvadratické formy). Najděte pomocí ní bázi, vzhledem k níž má hermitovská kvadratická forma na $\mathbb{C}^2$ zadaná předpisem

$$f_2(x) = -2\operatorname{Im} x_1\bar{x}_2 - 3|x_2|^2 \equiv i\bar{x}_2x_1 - ix_2\bar{x}_1 - 3|x_2|^2$$

diagonální matici.

(47) **(2)** Ortogonálně diagonalizujte hermitovskou kvadratickou formu na $\mathbb{C}^2$:

$$2|x|^2 + 5|y|^2 + \Re((3+3i)\bar{x}y)$$

(48) **(2)** Určete následující kvadriku (tj. typ vzhledem ke shodnostem, směry os, délky poloos, případně střed) v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem:

$$5x^2 - 16xy - 16xz - 7y^2 - 32yz - 7z^2 + 6x + 66y + 12z + 27 = 0$$

(49) **(2)** Určete následující kvadriku (tj. typ vzhledem ke shodnostem, směry os, délky poloos, případně střed) v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem:

$$5x^2 - 4xy + 8xz + 8y^2 + 4yz + 5z^2 - 86x - 88y + 32z + 161 = 0$$

(50) **(2)** Určete následující kvadriku (tj. typ vzhledem ke shodnostem, směry os, délky poloos, případně střed) v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem:

$$-x^2 + 4xz + y^2 + 4yz - 14x + 6y - 14z + 14 = 0$$

(51) **(1)** Při definici podmíněnosti jsme neuvažovali perturbaci matice A samotné. Dokažte, že pokud $\|\delta A\| < \|A\|$, pak

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

(52) **(1)** Nechť $\mathbb{A}$ je samosdružený operátor na prostoru V dimenze n, označme $\lambda_1 \ge \dots \lambda_n$ jeho vlastní čísla. Nechť W je podprostor ve V, označme $\mathbb{A}_W$ restrikci operátoru $\mathbb{A}$ na W. Dokažte, že

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \min\{\|\mathbb{A}_W\| | W \le V, \dim W = n-k+1\} \\ &= \min\{\max\{(\mathbb{A}w, w) | w \in W, \|w\| = 1\} | W \le V, \dim W = n-k+1\} \\ &= \max\{\min\{(\mathbb{A}w, w) | w \in W, \|w\| = 1\} | W \le V, \dim W = k\} \end{aligned}$$

Odvoďte odtud, že pokud A je hermitovská matice $n \times n$ a $\tilde{A}$ její podmatice vzniklá vynecháním posledního řádku a sloupce, pak vlastní čísla $\tilde{A}$ leží mezi vlastními čísly A.

(53) **(1)**Ukažte, že pro každou kvadratickou formu Q na signatury (p, q, n) obsahuje množina nulová množina kvadratické formy nějaký vektorový podprostor dimenze $N = \min(p, q) + n$ a neobsahuje vektorový podprostor vyšší dimenze. Ukažte, že pro každý vektorový podprostor W, který leží v nulové

množině, existuje podprostor N, který obsahuje W a také leží v nulové množině.

(54) **(1)** Podle věty o ortogonální diagonalizaci kvadratické formy existuje ortogonální báze, vzhledem k níž je matice formy Q_g diagonální. Jsou tedy vlastně vzhledem k této bázi diagonální dvě symetrické bilineární formy: forma g a skalární součin. V prvním zápisku jsme ale dokázali, že dvě matice mohou být současně diagonalizovatelné, pouze když komutují. To pro libovolné dvě symetrické matice určitě neplatí. V čem je problém?

(55) **(1)** Dokažte, že pokud A je matice bilineární formy f na $\mathbb{R}^n$ a B je matice skalárního součinu g tamtéž, pak řešení úlohy $\det(A - \lambda B) = 0$ vede nakonec k nalezení báze $\mathbb{R}^n$, vzhledem k níž je matice f diagonální a která je ortonormální vzhledem ke g.