ZÁPISEK TŘETÍ O TENZORECH

LAF, LS10/11, DALIBOR ŠMÍD

Multilineární zobrazení

Definice. Nechť $V_1, \dots, V_k$ a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení

$$T : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to \mathbb{W},$$

které je v každém argumentu lineární, tedy $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\forall r, s \in \mathbb{F}$, $\forall v_j \in V_j$, $v_i' \in V_i$ platí

$$\begin{aligned} &T(v_1, \dots, v_{i-1}, rv_i + sv_i', v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &\qquad = rT(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) + sT(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned}$$

nazveme **multilineárním**, nebo specifičtěji **k-lineárním** zobrazením. Pokud navíc $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = V$ a $W = \mathbb{F}$, mluvíme o **multilineární formě** nebo o k-krát **kovariantním tenzoru** na V. Množinu všech k-lineárních forem na V označujeme $T_k(V)$.

Příklady a poznámky:

(1) Obyčejné lineární zobrazení z V do W je ve smyslu této definice 1-lineárním zobrazením.

(2) Skalární součin na V je bilineární forma.

(3) Pokud A je čtvercová matice, jejíž řádky jsou $a_1, \dots, a_n$, pak zobrazení

$$\begin{aligned} \det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \ldots \times \mathbb{F}^n}_{n} &\to \mathbb{F} \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

je n-lineární forma.

(4) Nejjednodušším případem je $k = 1$ a $W = \mathbb{R}$, tedy lineární forma. Příklady lineárních forem jsou

$$\begin{aligned} V = \mathbb{F}^n, x &\mapsto x_1 \\ V = M_{nn}(\mathbb{F}), A &\mapsto \operatorname{Tr} A \\ V = P^n(x, \mathbb{F}), p &\mapsto p(2) \\ V = C^\infty(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R}), f &\mapsto \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

a podobně. Lineárním formám, tedy jedenkrát kovariantním tenzorům, se také říká **kovektory**.

(5) Z věty o dimenzi jádra a obrazu plyne, že každá netriviální lineární forma na prostoru konečné dimenze V má jádro dimenze $\dim V - 1$. Každému prostoru s takovou dimenzí se říká **nadrovina**. Není těžké dokázat, že každá nadrovina je jádrem některé lineární formy.

Date: 3. dubna 2011.

(6) Každá množina funkcí z množiny M do vektorového prostoru W tvoří vektorový prostor s operacemi zavedenými

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m)$$
$$(rf)(m) := r.f(m),$$

pro všechna $m \in M$. Speciálně je tedy vektorovým prostorem i $T_q(V)$.

(7) Nechť $T \in T_q(V)$, $v \in V$. Zobrazení

$$T' : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n-1} \to \mathbb{F}$$
$$(v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto T(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$$

je prvkem $T_{q-1}(V)$. Například dosazením pevného vektoru do jednoho z argumentů bilineární formy získáme lineární formu. Obecně se vzniklá forma nižšího řádu bude lišit podle toho, do kterého argumentu dosadíme.

Definice. Nechť $p, q \in \mathbb{N}$. Tenzorovým součinem rozumíme zobrazení

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \to T_{p+q}(V)$$

které je definováno pro libovolné vektory $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$ vztahem

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_{p+q}) := T(v_1, \ldots, v_p) S(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q})$$

Poznámky:

(1) Z definice snadno plyne, že pro $T, U \in T_p(V)$, $S \in T_q(V)$, $r, s \in \mathbb{F}$

$$(rT + sU) \otimes S = r.T \otimes S + s.U \otimes S,$$

totéž ve druhém argumentu tenzorového součinu. Tedy tenzorový součin je bilineární zobrazení.

(2) Z definice je také ihned vidět, že tenzorový součin není komutativní, ale je asociativní.

(3) Pokud α, β jsou lineární formy, pak $\alpha \otimes \beta$ je bilineární forma. Existují ale bilineární formy, které nelze napsat jako součin dvou lineárních forem. Pokud by se například skalární součin g rovnal $\alpha \otimes \beta$ a vzali bychom nenulový vektor $v \in \operatorname{Ker} \beta$, pak $g(v, v) = \alpha(v)\beta(v) = 0$, což je v rozporu s definicí skalárního součinu. Tenzorový součin tedy není zobrazení na. Tenzory, které se dají zapsat jako tenzorový součin tenzorů nižšího stupně, se označují jako **rozložitelné**.

Definice. Nechť V je vektorový prostor, $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze v něm, $T \in T_q(V)$. **Souřadnicemi kovariantního tenzoru** T vzhledem k M jsou čísla

$$T_{cd\ldots k} := T(e_c, e_d, \ldots, e_k),$$

kde $c, d, \ldots, k \in \{1, \ldots, q\}$.

Množina $T_q(V)$ je vektorový prostor, takže bychom čekali, že souřadnice na něm budou definovány pomocí nějaké báze v $T_q(V)$, ne ve V. V dalším oddíle ukážeme, že v $T_q(V)$ existuje báze, která je zkonstruována pouze pomocí M a která zavádí na $T_q(V)$ právě tyto souřadnice.

Jak vypadají souřadnice tenzorů, s nimiž jsme se dosud setkali?

(1) Pokud $T \in T_1(V)$ je kovektor, pak souřadnice T_a není nic jiného než a-tý element matice homomorfismu $T : V \to \mathbb{F}$ vzhledem k bázím $M \subset V$ a $\{1\} \subset \mathbb{F}$. Posledně jmenovaná báze je vlastně kanonickou bází v prostoru $\mathbb{F}$.

(2) Pokud $g : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ je skalární součin, pak $g_{ab} \equiv g(e_a, e_b)$ je ab-tý element matice skalárního součinu vzhledem k M.

(3) Pokud $T_{ab\ldots k}$ a $S_{li\ldots t}$ jsou souřadnice T a S vůči M, pak
$$(T \otimes S)_{ab\ldots t} = T_{ab\ldots k} S_{li\ldots t}$$
jsou souřadnice $T \otimes S$ vůči stejné bázi.

Nechť $M' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ je další báze V a $A \equiv (1_V)_{MM'}$ je matice přechodu od M k M'. Matice přechodu obsahuje ve sloupcích souřadnice nové báze vůči staré:
$$e'_a = A^b_a e_b$$
V tomto vztahu automaticky předpokládáme, že přes index b běží sumace od 1 do n. Je to běžná konvence, které se budeme i nadále držet, kdykoli bude ve vztahu stejný index jednou nahoře a jednou dole. Vidíme, že v tomto zápisu odpovídá horní index matice přechodu indexu řádkovému a dolní indexu sloupcovému. Snadno odtud plyne předpis pro transformaci souřadnic libovolného kovariantního tenzoru:
$$\begin{aligned} T'_{a\ldots b} &= T(e'_a, \ldots, e'_b) = T(A^r_a e_r, \ldots A^s_b e_s) \\ &= A^r_a \ldots A^s_b T(e_r, \ldots, e_s) = A^r_a \ldots A^s_b T_{r\ldots s} \end{aligned}$$

To je konvence týkající se matice přechodu, například matice skalárního součinu g_{ab} se netýká.

Příklady:

(1) Pokud α je kovektor, pak se jeho souřadnice transformují podle vztahu
$$\alpha'_a = A^r_a \alpha_r.$$
V maticovém zápise to můžeme přepsat na
$$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A,$$
kde $(\alpha)^T_M$ je *řádkový* vektor souřadnic α vůči M. Srovnejme tento vztah s transformací souřadnic vektorů
$$(v)_M = A(v)_{M'} \text{ nebo též } (v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$$
Matici $(A^{-1})^T$ se říká **matice kontragredientní** k A.

(2) Pokud g je bilineární forma, pak se její souřadnice transformují podle vztahu
$$g'_{ab} = A^r_a A^s_b g_{rs}.$$
V maticovém zápise to můžeme přepsat jako
$$G' = A^T G A,$$
kde interpretujeme souřadnice g_{ab} jako matici G s prvním indexem řádkovým a druhým sloupcovým (**matice bilineární formy**). Je to stejný vztah, který jsme v prvním semestru dostali pro transformaci matice skalárního součinu.

(3) Pro trilineární formu T můžeme interpretovat souřadnice T_{abc} jako řádkový vektor matic
$$(T_{1bc}, T_{2bc}, \ldots, T_{nbc}) =: (((T_1)_{bc}), ((T_2)_{bc}), \ldots, ((T_n)_{bc}))$$
Transformační vztah
$$T'_{abc} = A^r_a A^s_b A^t_c T_{rst}$$
se pak dá přepsat jako
$$(T'_1, \ldots, T'_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} A^T T_i A, \sum_{i=1}^n a_{i2} A^T T_i A, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{in} A^T T_i A \right).$$

T_i je vlastně matice bilineární formy $T(e_i, \cdot, \cdot)$ vzniklé dosazením i-tého vektoru báze do prvního argumentu.

Samozřejmě nás nic nenutí vzít jako „maticové“ indexy zrovna ty dva poslední a jako „vektorový“ ten první. Zavedení matic T_i je jenom početní a notační pomůcka, což je zdůrazněno i tím, že v posledním vztahu nepoužíváme sumační konvenci a píšeme elementy a_{ij} matice A tak, jak zvyklí z dřívějška.

Souřadnice T_{abc} si můžeme vizualizovat jako $n \times n \times n$ krychličku čísel, matice T_i jsou její řezy.

Duální prostor

Připomeňme definici ze zimního semestru:

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Prostor $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ všech kovektorů na V nazýváme **duálním prostorem** k V, značíme V^*.

Standardní báze na prostoru homomorfismů $\mathrm{Hom}(V, W)$ má pro případ $W = \mathbb{F}$ speciální jméno:

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ dimenze n, $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ báze v něm. Množinu kovektorů $M^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$, definovanou předpisem

$$\forall a, b \in \{1, \ldots, n\}, e^a(e_b) = \delta^a_b,$$

kde $\delta^a_b = 1$ pro $a = b$ a 0 pro $a \neq b$, nazýváme **duální báze** k M.

Příklady:

(1) Pokud K je kanonická báze v $\mathbb{F}^n$, pak K^* je množina $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$, kde i-tý kovektor ε^i přiřazuje vektoru $x \in \mathbb{F}^n$ jeho i-tou složku x^i.

(2) Vektor $v \in V$ lze rozvinout do báze M vztahem $v = v^j e_j$. Hodnota kovektoru $e^i \in M^*$ na vektoru v je

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^j \delta^i_j = v^i,$$

čili opět e^i je kovektor, který vektoru přiřazuje jeho i-tou souřadnici. I z tohoto důvodu budeme od nynějška psát souřadnice *vektorů* vždy s indexy *nahoře*, narozdíl od souřadnic *kovektorů*, které píšeme *dole*.

(3) Duální báze je vždy bází V^*, což je možné buď ověřit přímo, nebo se odvolat na důkaz věty o dimenzi $\mathrm{Hom}(V, W)$ z prvního semestru. Odtud také $\dim V^* = \dim V$.

(4) Pokud $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(3, 2), (4, 3)\} \equiv \{e_1, e_2\}$. Prvky duální báze $M^* = \{e^1, e^2\}$ lze zapsat jako $e^1 = a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2$, $e^2 = c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2$, kde a, b, c, d jsou nějaká čísla. Podmínky na duální bázi říkají, že

$$\begin{aligned}
e^1(e_1) &= a\varepsilon^1(e_1) + b\varepsilon^2(e_1) = 3a + 2b = 1 \\
e^1(e_2) &= a\varepsilon^1(e_2) + b\varepsilon^2(e_2) = 4a + 3b = 0 \\
e^2(e_1) &= c\varepsilon^1(e_1) + d\varepsilon^2(e_1) = 3c + 2d = 0 \\
e^2(e_2) &= c\varepsilon^1(e_2) + d\varepsilon^2(e_2) = 4c + 3d = 1
\end{aligned}$$

To je vlastně maticová rovnice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

čili úloha na inverzní matici. Jejím výpočtem dostáváme duální bázi $\{3\varepsilon^1 - 4\varepsilon^2, -2\varepsilon^1 + 3\varepsilon^2\}$.

Na duálním prostoru $V^* \equiv T_1(V)$ nyní máme dvě definice souřadnic, každá z nich závisí pouze na volbě báze M. Ukažme, že dávají totéž. Pokud α je kovektor a $\tilde{\alpha}$ jsou jeho souřadnice vzhledem bázi M^*, pak $\alpha = \tilde{\alpha}_i e^i$. Podle definice souřadnic kovektoru vzhledem k M platí

$$\alpha_j = \alpha(e_j) = \tilde{\alpha}_i e^i(e_j) = \tilde{\alpha}_i \delta^i_j = \tilde{\alpha}_j,$$

oba pojmy souřadnic tedy skutečně splývají. Rozvoj kovektoru do báze M^* je pak $\alpha = \alpha_i e^i$ a jeho aplikace na libovolný vektor

$$\alpha(v) = \alpha_i e^i(v^j e_j) = \alpha_i v^j e^i(e_j) = \alpha_i v^j \delta^i_j = \alpha_i v^i$$

Jak se transformují prvky duální báze při změně souřadnic? Transformační vztah pro souřadnice vektoru je

$$v^a = A^a_b v'^b.$$

Aplikujme na tuto rovnost inverzní matici:

$$(A^{-1})^r_a v^a = (A^{-1})^r_a A^a_b v'^b = \delta^r_b v'^b = v'^r$$

Protože v'^b je vlastně $e'^b(v)$, platí odtud $(A^{-1})^r_a e^a(v) = e'^r(v)$. Tedy e^r a $A^r_b e'^b$ jsou dvě zobrazení, která se mají rovnat pro libovolný vektor $v \in V$, tudíž

$$e'^r = (A^{-1})^r_a e^a$$

Doposud odvozené transformační vztahy můžeme shrnout do tabulky:

Transformace	maticově	tenzorově
prvky báze	$e'_r = \sum_b e_b(A)_{br}$	$e'_r = A^b_r e_b$
prvky duální báze	$e'^r = \sum_b (A^{-1})_{rb} e^b$	$e'^r = (A^{-1})^r_b e^b$.
souřadnice vektoru	$(v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$	$v'^r = (A^{-1})^r_b v^b$
souřadnice kovektoru	$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A$	$\alpha'_r = A^b_r \alpha_b$

Vidíme z ní, že objekty s dolními indexy se transformují pomocí matice A, tedy „stejně“ jako prvky báze, **kovariantně**. Objekty s horními indexy se transformují pomocí inverzní matice, tedy „opačně“ než prvky báze, **kontravariantně**.

Lemma. *Označme*

$$e^{a\dots b} := \underbrace{e^a \otimes \dots \otimes e^b}_{q} \in T_q(V)$$

Množina

$$(M^*)^q := \{e^{a\dots b} | a, \dots, b \in \{1, \dots, n\}$$

tvoří bázi prostoru $T_q(V)$ a souřadnice libovolného $T \in T_q(V)$ vůči této bázi jsou totožné se souřadnicemi T vzhledem k M.

Důkaz. Nechť T je libovolný tenzor se souřadnicemi $T_{r\dots s}$. Pak pro libovolné vektory platí

$$T(v, \dots, w) := T(v^r e_r, \dots, w^s e_s) = v^r \dots w^s T(e_r, \dots, e_s) = v^r \dots w^s T_{r\dots s}.$$

Lineární kombinace $\tilde{T} := T_{a\dots b} e^{a\dots b}$ má na stejných vektorech stejné hodnoty:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(v, \dots, w) &= T_{a\dots b} e^{a\dots b}(v, \dots, w) = v^r \dots v^s T_{a\dots b} e^{a\dots b}(e_r, \dots, e_s)\\ &= v^r \dots v^s T_{a\dots b} \delta^a_r \dots \delta^b_s = v^r \dots w^s T_{r\dots s}\end{aligned}$$

má na stejných vektorech stejné hodnoty, tedy $T = \tilde{T}$, $(M^*)^q$ generuje $T_q(V)$. Pokud $T = 0$, pak musí být nula i všechny souřadnice

$$T_{r\dots s} \equiv T(e_r, \dots, e_s),$$

čili $(M^*)^q$ je i lineárně nezávislá. Z předpisu

$$T = \tilde{T} = T_{a\dots b} e^{a\dots b}$$

vidíme, že souřadnice vzhledem k bázi $(M^*)^q$ jsou právě $T_{a\dots b}$. □

Věta (Duál duálu)**.** *Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{F}$. Pak existuje izomorfismus V a $(V^*)^*$, který nezávisí na volbě báze ve V.*

Důkaz. Nechť $v \in V$. Definujme homomorfismus $f_v : V^* \to \mathbb{R}$, jehož hodnota $f_v(\alpha)$ pro libovolnou lineární formu je rovna číslu $\alpha(v)$. Platí, že f_v je lineární forma na V^*, protože $\forall \alpha, \beta \in V^*$, $\forall r, s \in \mathbb{F}$ platí

$$f_v(r\alpha + s\beta) = (r\alpha + s\beta)(v) = r\alpha(v) + s\beta(v) = rf_v(\alpha) + sf_v(\beta).$$

Máme tedy zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi &: V \to (V^*)^* \\ &: v \mapsto f_v \end{aligned}$$

Toto zobrazení je homomorfismus, protože $\forall v, w \in V$, $\forall r, s \in \mathbb{F}$, $\forall \alpha \in V^*$ platí

$$\begin{aligned} [\Phi(rv + sw)](\alpha) &= f_{rv+sw}(\alpha) = \alpha(rv + sw) = r\alpha(v) + s\alpha(w) \\ &= rf_v(\alpha) + sf_w(\alpha) = r[\Phi(v)](\alpha) + s[\Phi(w)](\alpha) \end{aligned}$$

Zobrazení $\Phi(rv + sw)$ a $r\Phi(v) + s\Phi(w)$ se rovnají pro všechna $\alpha \in V^*$, jsou tedy totožná.

Dále ověříme, že Φ je prosté. Podle definic

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \Phi &= \{v \in V | \Phi(v) = 0\} = \{v \in V | \forall \alpha \in V^*, f_v(\alpha) = 0\} \\ &= \{v \in V | \forall \alpha \in V^*, \alpha(v) = 0\} \end{aligned}$$

Pro každý nenulový vektor v ale existuje lineární forma α, pro kterou $\alpha(v) \neq 0$. Stačí například zvolit doplněk W prostoru $\langle v \rangle$ ve V a definovat $\alpha(u + rv) = r$ pro libovolné $u \in W$ a $r \in \mathbb{F}$. Tedy $\operatorname{Ker} \Phi$ musí být nulový podprostor.

Protože $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$, musí být díky větě o dimenzi jádra a obrazu Φ izomorfismus. Byl definován bez výběru báze, čímž je tvrzení dokázáno. □

Zobrazení Φ se nazývá **kanonickým izomorfismem** V a $(V^*)^*$. Umožňuje ztotožnit prvky V (vektory) a $(V^*)^*$ („ko-kovektory“), v jistém smyslu vyhlásit rovnoprávnost vektorů a kovektorů: kovektor je zobrazení na vektorech, vektor je zobrazení na kovektorech. Tuto rovnoprávnost můžeme zdůraznit i zavedením zobrazení

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: V \times V^* \to \mathbb{F} \\ &(v, \alpha) \mapsto \langle v, \alpha \rangle := \alpha(v) = [\Phi(v)](\alpha) \equiv v(\alpha), \end{aligned}$$

kterému se obvykle říká **párování** vektorů a kovektorů. Přirozená báze $(M^*)^*$ ve $(V^*)^*$ je ztotožněná přímo s bází $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a definici duální báze můžeme pak zapsat pomocí párování jako

$$\langle e_j, e^i \rangle = \delta^i_j$$

. V souřadnicích se pak párování vektoru v a kovektoru α vyjádří vztahem

$$\langle v, \alpha \rangle = \langle v^i e_i, \alpha_j e^j \rangle = v^i \alpha_j \langle e_i, e^j \rangle = v^i \alpha_j \delta^j_i = v^i \alpha_i$$

Poznámky:

(1) Prostory V a V^* jsou samozřejmě také izomorfní, protože mají stejnou dimenzi. Jedním z možných izomorfismů může být zvolit ve V bázi M a vektoru $v \in V$ přiřadit kovektor $\alpha \in V^*$, jehož souřadnice $(\alpha)_M$ jsou rovny $(v)_M$. Pro různé báze $M \subset V$ dostaneme ale různé izomorfismy a vzhledem k tomu, že obecně není žádná báze lepší než jiná, žádný kanonický izomorfismus mezi V a V^* neexistuje.

(2) V nekonečné dimenzi není obecně zobrazení Φ na, máme tedy jen **kanonické vnoření** V do $(V^*)^*$.

Definice. Nechť $\phi : V \to W$ je homomorfismus. Pak zobrazení $\phi : W^* \to V^*$ definované $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in W^*$ vztahem

$$\langle \phi^*(\alpha), v \rangle = \langle \alpha, \phi(v) \rangle$$

nazýváme **duální homomorfismus** k homomorfismu ϕ.

Označme $\{e_i\}$ bázi ve V a $\{f_a\}$ bázi ve W. Matice B homomorfismu ϕ vzhledem k těmto bázím je definována předpisem $\phi(e_i) = B_i^a f_a$. Pak platí

$$\langle \phi^*(f^j), e_i \rangle = \langle f^j, B_i^a f_a \rangle = B_i^a \delta_a^j = B_i^j,$$

čili $\phi^*(f^j) = B_k^j e^k$. Matice homomorfismu a duálního homomorfismu jsou tedy navzájem transponované. Z toho plyne, že ϕ a ϕ^* mají stejnou hodnost.

Definice. Nechť $\phi : V \to W$ je homomorfismus, $q \in \mathbb{N}$. Pak zobrazení

$$\phi^* : T_q(W) \to T_q(V)$$

definované $\forall T \in T_q(W)$, $\forall v_1, \ldots, v_q \in V$ vztahem

$$(\phi^* T)(v_1, \ldots, v_q) = T(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_q))$$

nazýváme **indukovaný tenzor** k T pomocí ϕ, nebo též **pullback** T pomocí ϕ.

Pro $q = 1$ je pullback totéž co duální homomorfismus. Pro souřadnice indukovaného tenzoru platí

$$\begin{aligned}(\phi^* T)_{i\ldots j} &\equiv (\phi^* T)(e_i, \ldots, e_j) = T(\phi(e_i), \ldots, \phi(e_j)) \\ &= T(B_i^a f_a, \ldots, B_j^b f_b) = B_i^a \ldots B_j^b T_{a\ldots b}\end{aligned}$$

Smíšené tenzory

Definice. Nechť V je vektorový prostor. Označme $T^k(V)$ prostor všech k-lineárních forem na V^*, budeme mluvit též o k-krát **kontravariantních tenzorech** na V. **Souřadnicemi kontravariantního tenzoru** vůči bázi $M \subset V$ rozumíme čísla

$$T^{a\ldots b} := T(e^a, \ldots, e^b)$$

Podobně jako u kovariantních tenzorů je snadno vidět, že souřadnice vzhledem k M jsou vlastně souřadnicemi vůči bázi

$$M^k := \{e_{a\ldots b} | a, \ldots, b \in \{1, \ldots, n\}\},$$

kde

$$e_{a\ldots b} := \underbrace{e_a \otimes \ldots \otimes e_b}_{k} \in T^k(V)$$

Definice. Nechť V je vektorový prostor. Symbolem $T_q^p(V)$ označíme množinu všech zobrazení

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \mapsto \mathbb{R},$$

která jsou lineární v každém argumentu. Mluvíme o množině **p-krát kontravariantních a q-krát kovariantních tenzorů** na V nebo též o **tenzorech typu** (p, q). Číslo $p + q$ se označuje jako **stupeň tenzoru**. Souřadnicemi tenzoru $T \in T_q^p(V)$ vzhledem k bázi $M \subset V$ rozumíme

$$T_{r\ldots s}^{a\ldots b} := T(e^a, \ldots, e^b, e_r, \ldots, e_s)$$

O dolních indexech hovoříme jako o **indexech kovariantních** a horní se nazývají **indexy kontravariantními**.

Je zřejmé, že $T^p_q(V)$ je vektorový prostor. Tenzorový součin na smíšených tenzorech

$$\otimes : T^p_q(V) \times T^k_l(V) \mapsto T^{p+k}_{q+l}(V)$$

je definován nejpřirozenějším možným způsobem:

$$(T\otimes S)(w^1, \ldots, w^{p+k}, v_1, \ldots, v_{q+l}) := T(w^1, \ldots, w^p, v_1, \ldots, v_q)S(w^{p+1}, \ldots, w^{p+k}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+l})$$

Pak je zřejmé, že definované souřadnice vůči $M \subset V$ jsou vlastně souřadnice vzhledem k bázi $M^p \times (M^*)^q$ v $T^p_q(V)$ a tedy že libovolný tenzor lze rozvinout do báze jako

$$T = T^{a\ldots b}_{r\ldots s} e_a \otimes \ldots \otimes e_b \otimes e^r \otimes \ldots \otimes e^s \equiv T^{a\ldots b}_{r\ldots s} e^{r\ldots s}_{a\ldots b}$$

Často se používá také označení

$$T^p_q(V) \equiv \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q},$$

které vyjadřuje, že libovolný tenzor typu (p, q) lze zkonstruovat jako lineární kombinaci tenzorového součinu p vektorů a q kovektorů. Nekonečně dimenzionální vektorový prostor

$$T(V) := \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T^p_q(V)$$

spolu s operací tenzorového součinu tvoří tzv. asociativní algebru, které se říká **tenzorová algebra**. Obsahuje všechny skaláry, vektory, kovektory a všechny ostatní typy tenzorů dohromady a všechny operace s tenzory se odehrávají uvnitř ní. Také se pomocí ní konstruují další důležité algebry, jako například algebra symetrická, vnější nebo Cliffordova.

Někdy se jako tenzorová algebra V definuje pouze $\bigoplus_0^\infty T^p(V)$, tedy algebra všech kontravariantních tenzorů.

Příklad. Prostor $T^1_1(V) \equiv V \otimes V^*$ je přirozeně ztotožněn s prostorem $\mathrm{End}(V)$ všech endomorfismů na V. Prvek $v \otimes w$, kde $v \in V$ a $w \in V^*$, definuje lineární zobrazení $f_{v\otimes w} : V \to V$ předpisem

$$f_{v\otimes\alpha}(u) = \langle u, \alpha\rangle v \equiv \alpha(u)v.$$

Bázi $\{e_i \otimes e^j | i, j \in \{1, \ldots, n\}$ v $T^1_1(V)$ v tomto ztotožnění odpovídá standardní báze na $\mathrm{End}(V)$ z minulého semestru, neboť

$$(e_i \otimes e^j)(e_k) = e_i\delta^j_k,$$

tedy matice endomorfismu $e_i \otimes e^j$ vzhledem k bázi $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ má na pozici ik jedničku a všude jinde nuly. Endomorfismus $T := T^i_j e_i \otimes e^j$ má na bázi hodnoty

$$T(e_k) = (T^i_j e_i \otimes e^j)(e_k) = T^i_j e_i \delta^j_k = T^i_k e_i,$$

jeho matice vzhledem k M je proto T^i_k, kde horní index chápeme jako řádkový a dolní index sloupcový. Všimněte si, že to je stejná konvence jako pro matice přechodu. To není překvapivé, vzhledem k tomu, že matice přechodu se dá definovat jako speciální případ matice endomorfismu. Odtud je také jasně vidět, že přiřazení $T^1_1(V)$ a $\mathrm{End}(V)$ je opravdu izomorfismus. Kroneckerovo delta δ^i_k je pak matice identického endomorfismu, která je vůči kterékoli bázi stejná, rovná jednotkové matici:

$$(1_V)(e_k) = \delta^i_k e_i = e_k$$

Věta. *Nechť V je vektorový prostor, $M = \{e_1, \ldots, e_n\}, M' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvě báze v něm, $T \in T^p_q(V)$. Pak*

$$T'^{i\ldots j}_{k\ldots l} = (A^{-1})^i_a \ldots (A^{-1})^j_b A^c_k \ldots A^d_l T^{a\ldots b}_{c\ldots d}$$

Důkaz spočívá jen v dosazení vztahů $e'_r = A^b_r e_b$ a $e'^r = (A^{-1})^r_b e^b$ do definice souřadnic.

Napišme nyní maticové verze transformací souřadnic těch tenzorů stupně menšího než čtyři, u kterých jsme tak dosud neučinili:

(1) Tenzoru $g = g^{ab} e_a \otimes e_b \in V \otimes V$ se říká **bivektor**. Jeho souřadnice se transformují podle předpisu
$$g'^{ij} = (A^{-1})^i_a (A^{-1})^j_b g^{ab}$$
Definujeme-li matici bivektoru jako $(G)_{ij} := g^{ij}$, pak se dá transformační vztah zapsat jako
$$G' = A^{-1} G (A^{-1})^T$$

(2) Interpretujme souřadnice trivektoru $T = T^{abc} e_a \otimes e_b \otimes e_c$ jako řádek matic $(T_1, \ldots, T_n)$, kde $(T_i)_{jk} := T^{ijk}$. Pak
$$(T'_1, \ldots, T'_n) = \left(\sum_{i=1}^n (A^{-1})_{1i} A^{-1} T_i (A^{-1})^T, \ldots, \sum_{i=1}^n (A^{-1})_{ni} A^{-1} T_i (A^{-1})^T \right).$$

(3) Smíšený tenzor f typu $(1,1)$ se transformuje předpisem $f'^i_j = (A^{-1})^i_a A^b_j f^a_b$. Pro matici F s elementy $(F)_{ab} := f^a_b$ z toho dostáváme
$$F' = A^{-1} F A$$
tedy vlastně standardní vztah pro změnu matice endomorfismu při změně báze.

(4) Souřadnice smíšeného tenzoru $T = T^{ij}_k e_i \otimes e_j \otimes e^k$ typu $(2,1)$ můžeme zapsat například jako n-tici matic s elementy $(T_i)_{jk} := T^{ij}_k$. Pak
$$T'_a = \sum_{i=1}^n (A^{-1})_{ai} (A^{-1} T_i A)$$

(5) Pro tenzor typu $(1,2)$ se souřadnicemi zapsanými maticemi $(T_i)_{jk} := T^j_{ik}$ máme
$$T'_a = \sum_{i=1}^n (A^T)_{ai} (A^{-1} T_i A)$$

Operace s tenzory

Definice. Nechť V je vektorový prostor, $\{e_a\}$ je báze V, $p > 0$, $q > 0$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$. Zobrazení
$$\begin{aligned} C_{ij} : T^p_q(V) &\to T^{p-1}_{q-1}(V) \\ T &\mapsto T(\ldots, \underset{i}{e_a}, \ldots, \underset{j}{e^a}, \ldots) \end{aligned}$$
se nazývá **kontrakce** (nebo též **zúžení**) přes i-tý kovariantní a j-tý kontravariantní index.

Definice samozřejmě předpokládá, že přes index a se sčítá. Na volbě báze $\{e_a\}$ nezáleží, protože
$$T(e'_a, e'^a, \ldots) = T(A^b_a e_b, (A^{-1})^a_c e^c, \ldots) = \delta^b_c T(e_b, e^c, \ldots) = T(e_b, e^b, \ldots)$$
Souřadnice tenzoru $C_{ij}(T)$ jsou zjevně $T^{\ldots a \ldots}_{\ldots a \ldots}$.

Párování kovektoru w a vektoru v lze zapsat pomocí tenzorového součinu a kontrakce:
$$\begin{aligned} C_{11}(w \otimes v) &= (w \otimes v)(e_a, e^a) = w_i e^i(e_a) v^j e_j(e^a) \\ &= w_i v^j \delta^i_a \delta^a_j = w_i v^j \delta^i_j = w_i e^i (v^j e_j) = \langle w, v \rangle \end{aligned}$$

Analogicky lze vyčíslení libovolného tenzoru T typu (p,q) na libovolných argumentech psát jako

$$T(v,\dots,w) = \underbrace{(C\circ\dots\circ C)}_{p+q}(T\otimes v\otimes\dots\otimes w),$$

kde C jsou kontrakce podle odpovídajících dvojic indexů.

Definice. Nechť $T \in T^0_q$. Pak definujeme **úplnou symetrizaci**, resp. **úplnou antisymetrizaci** tenzoru T předpisem $\forall v_1,\dots,v_q \in V$

$$[\pi_S(T)](v_1,\dots,v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} T(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(q)}), \text{ resp.}$$
$$[\pi_A(T)](v_1,\dots,v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} \operatorname{sgn}(\rho) T(v_{\rho(1)},\dots,v_{\rho(q)})$$

Snadno se ověří, že

$$\pi^A\circ\pi^A = \pi^A$$
$$\pi^S\circ\pi^S = \pi^S$$
$$\pi^A\circ\pi^S = \pi^S\circ\pi^A = 0$$

Obě zobrazení jsou tedy projekce na dva podprostory, podprostor $S_q(V)\equiv S^q(V^*)$ úplně symetrických kovariantních tenzorů a podprostor $\Lambda_q(V)\equiv\Lambda^q(V^*)$ úplně antisymetrických tenzorů, v jejichž průniku je pouze nulový tenzor.

Pro $q=2$ definice říká, že

$$[\pi_S(T)]_{ab} = \frac{1}{2}(T_{ab}+T_{ba}) =: T_{(ab)}$$
$$[\pi_A(T)]_{ab} = \frac{1}{2}(T_{ab}-T_{ba}) =: T_{[ab]}$$

Zde jsme zavedli tradiční závorkovou notaci pro symetrizaci a antisymetrizaci indexů. Zjevně platí $T_{(ab)} = T_{(ba)}$ a $T_{[ab]} = -T_{[ba]}$, tedy matice $(T_{(ab)})$ je symetrická a matice $(T_{[ab]})$ antisymetrická. Vlastnost $T_{ab} = T_{(ab)}+T_{[ab]}$ znamená, že každý tenzor typu $(0,2)$ je možné (jednoznačně) rozložit na jeho symetrickou a antisymetrickou část

$$\begin{aligned}T &= T_{ab}e^a\otimes e^b = T_{(ab)}e^a\otimes e^b + T_{[ab]}e^a\otimes e^b\\ &= T_{(ab)}\frac{1}{2}(e^a\otimes e^b+e^b\otimes e^a) + T_{[ab]}\frac{1}{2}(e^a\otimes e^b+e^b\otimes e^a)\\ &= T_{(ab)}e^{(ab)} + T_{[ab]}e^{[ab]}\end{aligned}$$

Lineárně nezávislých tenzorů $e^{[ab]}$ je právě tolik, kolik je dvouprvkových množin čísel z $\{1,\dots,n\}$, tedy $\binom{n}{2}$. Počet tenzorů $e^{(ab)}$ se rovná zase rovná počtu dvouprvkových kombinací s opakováním z $\{1,\dots,n\}$, tedy $\binom{n+1}{2}$. Součet obou čísel je n^2, což je rovno dimenzi $T^0_2(V)$, jak jsme mohli předpokládat na základě věty o dimenzi spojení a průniku.

(Anti)symetrizaci indexů můžeme zavést i pro tenzory vyšších stupňů:

$$T_{(a\dots b)} := \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} T(\rho(e_a,\dots,e_b))$$
$$T_{[a\dots b]} := \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q} \operatorname{sgn}(\rho)T(\rho(e_a,\dots,e_b)),$$

kde $\rho(e_a, \dots, e_b)$ znamená přeuspořádání posloupnosti vektorů $e_a, \dots, e_b$ permutací ρ. (Anti)symetrizací prvků báze $\{e^{a\dots b}\}$ v $T^0_q(V)$ dostáváme prvky $e^{(a\dots b)}$ a $e^{[a\dots b]}$, které tvoří bázi v $S^q(V^*)$ a $\Lambda^q(V^*)$. Je vidět, že

$$\dim S^q(V^*) = \binom{n+q-1}{q}$$
$$\dim \Lambda^q(V^*) = \binom{n}{q},$$

Pro $q > n$ tedy už žádné netriviální úplně antisymetrické tenzory nejsou, zatímco prostor úplně symetrických tenzorů je nenulový pro všechna q. Pro $q > 2$ stále platí, že $S^q(V^*) \cap \Lambda^q(V^*) = 0$, ale narozdíl od případu $q = 2$ je

$$\dim S^q(V^*) + \dim \Lambda^q(V^*) < \dim T^0_q(V),$$

tedy existují tenzory, z nichž po odečtení úplně symetrické a úplně antisymetrické části ještě něco zbyde.

(Anti)symetrizaci můžeme úplně stejně zavést i pro kontravariantní tenzory, případně pro tenzory smíšené. U smíšených má ale smysl provádět ji přes indexy stejného typu. Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n. Skalární součin g

na V je tenzor typu $(0, 2)$, můžeme jej zapsat vzhledem k bázi jako

$$g = g_{ab} e^a \otimes e^b$$

Tenzoru skalárního součinu se častěji říká **metrický tenzor**. Pokud je $\{e'_a\}$ ortonormální báze, pak je g'_{ab} jednotková matice, čili

$$g = e'^1 \otimes e'^1 + e'^2 \otimes e'^2 + \ldots + e'^n \otimes e'^n$$

Můžeme definovat bivektor

$$g^{-1} := g^{ab} e_a \otimes e_b$$

předpisem $g^{ac} g_{cb} = \delta^a_b$, čili matice skalárního součinu g a bivektoru g^{-1} jsou navzájem inverzní. Dosazením transformačních vztahů pro bilineární formy a bivektory snadno odvodíme, že tato definice nezávisí na volbě báze. Vůči ortonormální bázi $\{e'_a\}$ je i g'^{ab} jednotková matice a tedy

$$g^{-1} = e'_1 \otimes e'_1 + e'_2 \otimes e'_2 + \ldots + e'_n \otimes e'_n$$

Díky tomu máme zaručeno, že i g^{-1} je pozitivně definitní symetrická bilineární forma na V^*, tzv. **duální metrický tenzor**.

Můžete se divit, proč se vůbec zaobíráme situací, kdy (g_{ab}) není jednotková matice, když ortonormální bázi lze zavést pro každý skalární součin. Existují tři oblasti, kvůli nimž je důležité naučit se počítat s obecným metrickým tenzorem. Jsou to křivočaré systémy souřadnic, kde se metrický tenzor mění v prostoru (je to vlastně **tenzorové pole**), speciální teorie relativity, kde není pozitivně definitní (mluvíme o **pseudometrickém tenzoru**), a analytická mechanika, která se popisuje pomocí pojmů symplektické geometrie, v níž je „skalární součin“ antisymetrický. Budeme se tedy snažit, aby se naše formulace dala snadno adaptovat i na tyto tři odlišné situace.

Definice. Nechť (V, g) je vektorový prostor se skalárním součinem. Izomorfismy

$$\flat_g : V \to V^* \qquad \forall u \in V, \quad \langle u, \flat_g v\rangle = g(u, v)$$
$$\sharp_g : V^* \to V \qquad \forall \beta \in V^*, \quad \langle \sharp_g \alpha, \beta\rangle = g^{-1}(\alpha, \beta),$$

nazýváme **spouštěním** a **zdviháním indexu**.

Vzhledem k bázi $\{e_a\}$ má kovektor $\flat_g v$ souřadnice $(\flat_g v)_i$. Podle definice pak pro libovolný vektor $u = u^i e_i$ platí

$$\langle \flat_g v, u\rangle = (\flat_g v)_i u^i = g(u,v) = g_{ij} u^i v^j,$$

tedy $(\flat_g v)_i = g_{ij} v^j$. Tedy speciálně

$$\flat_g e_a = (\flat_g e_a)_i e^i = g_{aj}(e_a)^j e^i = g_{aj}\delta^j_a e^i = g_{ai} e^i$$

Podobně pro $\alpha \in V^*$ je

$$(\sharp_g \alpha)^i = g^{ij}\alpha_j.$$
$$\sharp_g e^b = g^{bj} e_j$$

Vzájemná inverznost matic metrického a duálního metrického tenzoru znamená, že izomorfizmy $\flat$ a $\sharp$ jsou také navzájem inverzní:

$$(\sharp_g \flat_g v)^a = g^{ab} g_{bc} v^c = \delta^a_c v^c = v^a$$
$$(\flat_g \sharp_g \alpha)_a = g_{ab} g^{bc}\alpha_c = \delta^c_a \alpha_c = \alpha_a$$

Obvykle se místo $(\flat_g v)_i$ píše pouze v_i a místo $(\sharp_g \alpha)^i$ pouze α^i, odtud název spouštění a zdvihání indexu. Je důležité mít na paměti, že obecně se například číslo v_3 *nerovná* číslu v^3, ale číslu $g_{3i}v^i$. Rovnost nastane pouze tehdy, když je (g_{ab}) jednotková matice, tedy v^i jsou souřadnice vůči ortonormální bázi.

V zimním semestru jsme v kapitole o skalárním součinu zavedli pojem duálního, nebo též adjungovaného homomorfismu. Ke každému homomorfismu dvou prostorů se skalárními součiny

$$\phi : (V,g) \to (W,h)$$

existuje homomorfismus (který nyní musíme označit trochu jinak než v zimním semestru)

$$\phi^t : (W,h) \to (V,g)$$

definovaný $\forall v \in V, w \in W$ předpisem

$$g(v, \phi^t(w)) = h(\phi(v), w)$$

Jak souvisí ϕ^t s homomorfismem ϕ^*, který jsme také nazývali duálním, ale k jeho definici jsme skalární součin nepotřebovali?

Věta. *Nechť $\phi : (V,g) \to (W,h)$ je homomorfismus prostorů se skalárním součinem. Pak*

$$\phi^t = \sharp_g \circ \phi^* \circ \flat_h$$

Důkaz. Podle definic $\forall v \in V$, $\forall w \in W$ platí

$$g(\sharp_g[\phi^*(\flat_h w)], v) = \langle \phi^*(\flat_h w), v\rangle = \langle \flat_h w, \phi(v)\rangle = h(w, \phi(v))$$

□

Pokud pracujeme se souřadnicemi vzhledem k ortonormální bázi, jsou matice zobrazení $\flat_g$ a $\sharp_g$ jednotkové a matice homomorfismů ϕ^t a ϕ^* jsou obě rovny transponované matici k matici homomorfismu ϕ.

Zdvihat a spouštět indexy je možné i u tenzorů vyššího stupně. Nechť $T \in T^3_0(V)$. Pak tenzor $T(\flat_g\cdot, \cdot, \cdot) \in T^2_1(V)$ má souřadnice

$$T_a{}^{bc} = T(\flat_g e_a, e^b, e^c) = T(g_{ai}e^i, e^b, e^c) = g_{ai}T^{ibc}$$

Píšeme $T_a{}^{bc}$ místo T^{bc}_a, protože existují ještě další dva tenzory

$$T(\flat_g\cdot, \cdot, \cdot), T(\cdot, \flat_g\cdot, \cdot) \in T^2_1(V)$$

se souřadnicemi

$$T^b{}_a{}^c, T^{bc}{}_a,$$

které od sebe potřebujeme umět odlišit. Pomocí zdvihu a spuštění indexu je pak možné definovat kontrakci přes libovolné dva indexy: tenzor

$$C_{12}T := C_{11}T(\flat_g \cdot, \cdot, \cdot)$$

má souřadnice

$$T_a{}^{ac} = g_{ai}T^{iac} = g_{ia}T^{aic} = T^a{}_a{}^c.$$

Pokud je T úplně symetrický, pak se všechny jeho kontrakce rovnají,

$$T_a{}^{ac} = g_{ai}T^{iac} = g_{ai}T^{cia} = T^c{}_a{}^a, \text{ apod.}$$

Je-li T úplně antisymetrický, jsou všechny jeho kontrakce nulové, neboť díky symetrii g_{ab} máme

$$T_a{}^{ac} = g_{ai}T^{iac} = g_{ai}(-T^{iac}) = -g_{ia}T^{iac} = -T_i{}^{ic}$$

Pullback tenzoru umožňuje zavést skalární součin na vektorovém prostoru, který je vnořen do jiného prostoru se skalárním součinem pomocí monomorfismu ϕ:

Věta. *Nechť $\phi : V \to W$ je monomorfismus, h je metrický tenzor ve W. Pak ϕ^*h je metrický tenzor ve V.*

Důkaz. Pro libovolné vektory $u, v \in V$ je $g(u, v)$ rovno $h(\phi(u), \phi(v))$. Symetričnost g je zřejmá. Pro $u \neq 0$ je $\phi(u) \neq 0$, tedy

$$g(u, u) = h(\phi(u), \phi(u)) > 0,$$

takže g je i pozitivně definitní. □

Matice indukovaného metrického tenzoru $g := \phi^*h$ je dána vztahem

$$g_{ij} = B_i^a h_{ab} B_j^b \text{ čili } G = B^T HB$$

Srovnejte tento vztah s předpisem pro transformaci matice skalárního součinu při změně báze.

Cvičení

(1) **(4)** Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou lineární formy:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(a, b) = a + bi$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = 1 + 2a + 3b$
   (d) $F_x : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, kde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ je vektorový prostor všech reálných hladkých funkcí na množině M, $F_x(f) = f(x)$, kde $x \in M$.
   (e) $F : M^{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$

(2) **(4)** Nechť $W = \langle(1, 1, 2, 1), (3, 1, 2, 1)\rangle \leq \mathbb{R}^4$. Popište všechny lineární formy, které vymizí na celém W.

(3) **(4)** Nechť $W' = \langle\varepsilon^1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4, \varepsilon^1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^5, \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - \varepsilon^5\rangle \leq (\mathbb{R}^5)^*$. Popište všechny vektory z $\mathbb{R}^5$, které patří do nulové množiny všech prvků W'.

(4) **(4)** Nechť $M = \{(1, 1), (1, -1)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, najděte souřadnice $\alpha := \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2$ vzhledem k M.

(5) **(4)** Nechť $u = (1, 1), v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Vyčíslete $(\varepsilon^1 \otimes \varepsilon^2 \otimes \varepsilon^1)(u, u, v)$.

(6) **(4)** Najděte duální bázi k bázi $\{(3, -5), (-2, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(7) **(4)** Nechť $M = \{(1, 3), (1, 2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, $\alpha_i := (1, 2)$ souřadnice kovektoru vzhledem k M. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(3, 1), (3, 2)\}$.

(8) **(4)** Nechť $M = \{(1, 3), (1, 2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matice bilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k $M' := \{(2, 3), (3, 5)\}$.

(9) **(4)** Najděte souřadnice bivektoru $(1,1) \otimes (1,3)$ vzhledem ke kanonické bázi.
(10) **(4)** Nechť T je tenzor typu $(3,0)$. Vyjádřete souřadnice jeho symetrizace a antisymetrizace $T_{(abc)}$ a $T_{[abc]}$ pomocí souřadnic samotného T.
(11) **(3)** Najděte bázi $M \subset \mathbb{R}^2$, k níž je báze $\{3\varepsilon^1 - \varepsilon^2, -8\varepsilon^1 + 3\varepsilon^2\}$ duální.
(12) **(3)** V prostoru $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem uvažujme vektory $u_1 = (4,1)$, $u_2 = (3,1)$ a definujme kovektory $e^i(v) := (u_i, v)$ pro $i = 1,2$. Najděte bázi duální k $\{e^1, e^2\}$.
(13) **(3)** Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ uvažujme lineární formy $e^i : p(x) \mapsto p^{(i)}(0)$, $i \in \{0,1,2\}$. Dokažte, že $\{e^0, e^1, e^2\}$ je báze a najděte bázi k ní duální.
(14) **(3)** Kovektory α, β, γ mají vzhledem k bázím M a M' vyjádření

$$\alpha = e^1 + e^2 + e^3 = e'^1 + e'^2$$
$$\beta = e^1 - e^3 = e'^2 + e'^3$$
$$\gamma = e^1 = e'^1 + e'^3$$

Určete matici přechodu od M k M'.
(15) **(3)** Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_2)_{jk})) := \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

matice trilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
(16) **(3)** Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matice bivektoru vzhledem k M. Najděte jeho matici vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
(17) **(3)** Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

souřadnice tenzoru $T \in T_1^2(\mathbb{R}^2)$ vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T_k^{ij}$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
(18) **(3)** Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

souřadnice tenzoru $T \in T_2^1(\mathbb{R}^2)$ vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T_{jk}^i$. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
(19) **(3)** Nechť $\phi = \varepsilon^1 + 2\varepsilon^2 \in (\mathbb{R}^2)^*$. Definujme tenzor typu $(2,1)$

$$T(u,v,\psi) = (\phi \otimes \psi)(v,u)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Najděte souřadnice $\pi^S(T)$ vzhledem ke kanonické bázi.
(20) **(3)** Nechť $a = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$ Definujme tenzor typu $(1,2)$

$$T(u,\phi,\psi) = \phi(u)\psi(a) - 2\phi(a)\psi(u)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Najděte souřadnice $C_{11}T$ vzhledem ke kanonické bázi.
(21) **(3)** Nechť $a = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem. Definujme tenzor typu $(2,1)$

$$T(u,v,\psi) = (a,u)\psi(v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Pomocí zdvihu/spuštění indexu převeďte T na kovariantní tenzor a spočtěte souřadnice jeho úplné antisymetrizace vzhledem ke kanonické bázi.

(22) **(3)** Nechť T je tenzor typu $(2,2)$ definovaný předpisem

$$T(u,v,\phi,\psi)=\phi(u)\psi(v)$$

Určete souřadnice tenzoru $T(\cdot,\cdot,\varepsilon^1,\cdot)$ vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $\{(1,1),(1,0)\}$.

(23) **(3)** Nechť $V=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $v=(1,-1)$, $T:V^*\times V^*\to\mathbb{R}$ je zobrazení definované

$$T(\phi,\psi)=\phi(u)\psi(v)-2\phi(v)\psi(u)$$

Ověřte, že se jedná o tenzor, najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $\{(-2,1),(1,1)\}$ a ověřte rovnost pomocí transformačního vztahu.

(24) **(3)** Uvažujme $V=\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, $w=(3,1)$, $T:V^*\times V\times V\to\mathbb{R}$ je tenzor definovaný

$$T(\phi,u,v)=\phi(w)(u,v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem k bázi $\{(1,0),(1,1)\}$ a vyjádřete je jako dvojici matic.

(25) **(3)** Nechť $a=(a^1,a^2)\in\mathbb{R}^2$ a T je tenzor typu $(1,2)$ na $\mathbb{R}^2$ definovaný pro $\phi,\psi\in(\mathbb{R}^2)^*, u\in\mathbb{R}^2$ vztahem

$$T(\phi,\psi,u)=\phi(a)\psi(u)-\psi(a)\phi(u)$$

(a) Ukažte, že T je antisymetrický v prvních dvou argumentech.
(b) Najděte souřadnice T vůči kanonické bázi a zapište je jako dvojici matic.
(c) Napište transformační vztah pro změnu souřadnic tenzoru T při přechodu do nějaké báze M'.
(d) Pomocí tohoto transformačního vztahu najděte souřadnice tenzoru T vůči bázi $\{(2,1),(3,1)\}$.

(26) **(3)** Nechť $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ je homomorfismus zadaný svou maticí vzhledem ke kanonickým bázím:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

Najděte matici ϕ^* vzhledem k duálním bázím k $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,0)\}$ a $\{(1,2),(1,3)\}$.

(27) **(3)** Nechť $M=\{(1,1),(2,3)\}$, $N=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ je homomorfizmus, jehož matice vzhledem k bázím M a N je

$$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\\-1&2\end{pmatrix}$$

Určete matici ϕ^* vzhledem ke kanonickým bázím.

(28) **(3)** Nechť $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ je endomorfismus definovaný vztahy $\phi((3,2))=(1,1)$, $\phi((4,3))=(1,-1)$. Určete matici duálního endomorfizmu vzhledem ke kanonické bázi a bázi $\{(2\varepsilon^1-\varepsilon^2,3\varepsilon^1-\varepsilon^2\}$.

(29) **(2)** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $M=\{u_1,\dots,u_k\}$ množina vektorů v něm, pro každý z těchto vektorů definujme $f_i\in V^*$ předpisem $f_i(v)=(u_i,v)$. Dokažte, že $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} f_i\oplus\langle M\rangle=V$.

(30) **(2)** Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze, W jeho podprostor, $g\in W^*$. Dokažte, že existuje $f\in V^*$ taková, že $\forall u\in W,\ f(u)=g(u)$.

(31) **(2)** Nechť V je vektorový prostor dimenze n, $M \subset V$, $N \subset V^*$,

$$\Phi(M) := \{\alpha \in V^* | \forall v \in M \alpha(v) = 0\}$$

$$\Psi(N) := \{v \in V | \forall \alpha \in N \alpha(v) = 0\} \equiv \bigcap_{\alpha \in N} \operatorname{Ker} \alpha$$

Dokažte, že $\Phi(M)$, $\Psi(N)$ jsou podprostory, $\Phi(M) = \Phi(\langle M \rangle)$, $\Psi(N) = \Psi(\langle N \rangle)$ a pokud $W \leq V$, $U \leq V^*$, pak

$$\dim \Phi(W) = n - \dim \Phi(W)$$
$$\dim \Psi(U) = n - \dim \Psi(U)$$
$$\Phi(\Psi(U)) = U$$
$$\Psi(\Phi(W)) = W$$

(32) **(2)** Na prostoru $(P^n(x, \mathbb{R}))^*$ najděte matici přechodu od báze $\{p(0), p'(0), \dots, p^{(n)}(0)\}$ k bázi $\{p(1), p'(1), \dots, p^{(n)}(1)\}$.

(33) **(2)** Nechť V je vektorový prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, a uvažujme navzájem různá čísla $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Ověřte, že množina zobrazení $M = \{F_0, \dots, F_n\}$, kde $F_i : V \to \mathbb{R}$ je definováno $F_i(p) = p(c_i)$, tvoří bázi V^*. Ověřte, že množina $\{p_0, \dots p_n\}$ tzv. Lagrangeových polynomů

$$p_i(x) := \Pi_{j \neq i} \frac{(x - c_j)}{(c_i - c_j)}$$

tvoří duální bázi k M.

(34) **(2)** Nechť $V = P^n(\mathbb{R})$ je prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n, $a, b \in \mathbb{R}$, definujme lineární formu $f \in V^*$ vztahem

$$f(p) = \int_a^b p(x) dx$$

a endomorfizmus $D : V \to V$ vztahem $D(p(x)) = p'(x)$. Čemu se rovná $D^*(f)$? Určete $\operatorname{Ker} D^*$.

(35) **(2)** Nechť B je pevná matice $n \times n$, definujme endomorfizmus prostoru všech matic $n \times n$ vztahem $F(A) := AB - BA$. Nechť f je lineární forma na tomto prostoru daná vztahem $f(A) := \operatorname{Tr}(A)$. Dokažte, že $f \in \operatorname{Ker} F^*$.

(36) **(2)** Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Definujme $\forall u \in V$ lineární formu $f_u \in V^*$ předpisem $f_u(v) := (u, v)$. Tím je definováno zobrazení $F : V \to V^*$, $F(u) = f_u$. Dokažte, že F je izomorfizmus.

(37) **(2)** Nechť V, W jsou vektorové prostory konečné dimenze. Dokažte, že zobrazení $F : \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$, které homomorfizmu ϕ přiřazuje jeho duální homomorfizmus $F(\phi) := \phi^*$, je izomorfizmus vektorových prostorů $\operatorname{Hom}(V, W)$ a $\operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.

(38) **(2)** Dokažte, že zdvihání a spouštění indexu jsou izometrie prostorů (V, g) a (V^*, g^{-1}).

(39) **(2)** Jaký je vztah mezi $\phi : (V, g) \to (W, h)$ a ϕ^t, pokud ϕ je izomorfismus a $g = \phi^* h$?

(40) **(2)** Dokažte, že pokud mají dvě lineární formy na prostoru konečné dimenze stejné jádro, pak jsou jedna násobkem druhé.

(41) **(2)** Zkonstruujte tenzor, který nelze rozložit na součet úplně symetrického a úplně antisymetrického tenzoru.

(42) **(2)** Nechť $M = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$. Na podprostoru $\langle M \rangle$ indukujte metrický tenzor ze standardního skalárního součinu na $\mathbb{R}^3$ pomocí identického vnoření $\phi : \langle M \rangle \to \mathbb{R}^3$. Napište jeho matici vzhledem k bázi M.

(43) **(1)** Dokažte, že pokud mají dvě lineární formy na prostoru V(nepředpokládáme konečnou dimenzi) stejné jádro, pak jsou jedna násobkem druhé.

(44) **(1)** Pomocí vztahu pro transformaci souřadnic bilineární formy, že pro každou symetrickou bilineární formu g existuje báze, v níž má g diagonální matici.

(45) **(1)** Nechť V je vektorový prostor dimenze n. Úplně antisymetrický tenzor z $\Lambda^p(V^*)$ se nazývá **p-forma**. **Vnějším součinem** rozumíme zobrazení, které p-formě α a q-formě β přiřazuje $p+q$-formu

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!} q! \pi^A(\alpha \otimes \beta)$$

Dokažte, že se jedná o bilineární, asociativní zobrazení, pro které platí **gradovaná komutativita**

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{p+q} \beta \wedge \alpha$$

Ukažte dále, že platí

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a \ldots b} e^a \wedge \ldots \wedge e^b$$

Vektorový prostor $\Lambda(V^*) := \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V^*)$ spolu s operací vnějšího součinu se nazývá **vnější algebra**. Je to základní algebraický objekt pro teorii vícerozměrné integrace.

(46) **(1)** Nechť $v \in V$, $\alpha \in \Lambda^p V^*$. **Vnitřním součinem** v a α rozumíme $(p-1)$-formu charakterizovanou předpisem

$$i_v(\alpha)(u, \ldots, v) := \alpha(v, u, \ldots, w)$$

Dokažte, že se jedná o bilineární zobrazení, které splňuje

(a) $i_v i_w + i_w i_v = 0$
(b) $(i_v \alpha)_{a \ldots b} = v^i \alpha_{ia \ldots b}$
(c) $i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_v(\beta)$
(d) Pokud $\omega \in V^*$, $\varepsilon_\omega \alpha := \omega \wedge \alpha \in \Lambda^{p+1} V^*$, pak

$$\varepsilon_\nu \varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega \varepsilon_\nu = 0$$
$$i_v \varepsilon_\omega + \varepsilon_\omega i_v = \langle v, \omega \rangle 1_{\Lambda(V^*)}$$

(47) **(1)** Nechť V je vektorový prostor dimenze n a $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, tzv. **top-forma**. Dokažte, že v bázi $\{e_i\}$ se dá ω zapsat jako

$$\omega = \lambda e^1 \wedge \ldots \wedge e^n,$$

kde λ je nějaké číslo, a že veličina λ, která zastupuje všechny souřadnice ω, se při změně báze transformuje podle předpisu

$$\lambda' = \det(A) \lambda,$$

kde A je matice přechodu.