ZÁPISEK DRUHÝ O JORDANOVĚ TVARU

LAF, LS10/11, DALIBOR ŠMÍD

Zobecněný vlastní podprostor

Z důkazu kritéria diagonalizovatelnosti je vidět, že součet geometrických násobností je menší nebo roven dimenzi V. Pokud bude ostře menší, nebude možné dát dohromady dostatek lineárně nezávislých vlastních vektorů, aby mohly tvořit bázi. Bude třeba najít další, tzv. **zobecněné vlastní vektory**, kterými bázi doplníme.

Definice. Nechť $f \in \operatorname{End}(V)$, $\lambda \in \sigma(f)$, označme $f_\lambda := f - \lambda 1_V$. **Zobecněným vlastním podprostorem** příslušným λ nazýváme množinu

$$V_\lambda := \{v \in V | \exists m \in \mathbb{N} : f_\lambda^m(v) = 0\}$$

Lemma. *Nechť* $F \in \operatorname{End}(V)$. *Pak* $\exists k \in \mathbb{N}$, *že* $\forall l \in \mathbb{N}$ *je* $\operatorname{Ker} F^k = \operatorname{Ker} F^{k+l}$, $\operatorname{Im} F^k = \operatorname{Im} F^{k+l}$. *Pak platí rozklad*

$$V = \operatorname{Ker} F^k \oplus \operatorname{Im} F^k,$$

který je invariantní vůči F, *přesněji řečeno* $F(\operatorname{Ker} F^k) \subset \operatorname{Ker} F^k$, $F(\operatorname{Im} F^k) = \operatorname{Im} F^k$.

Důkaz. V posloupnosti

$$0 \leq \operatorname{Ker} F \leq \operatorname{Ker} F^2 \leq \dots \operatorname{Ker} F^k \leq \operatorname{Ker} F^{k+1} \leq \dots$$

nemohou být všechny inkluze ostré, protože se jedná o podprostory v prostoru V, jenž má konečnou dimenzi. Pokud k je nejmenší takové, že $\operatorname{Ker} F^k = \operatorname{Ker} F^{k+1}$, a $v \in \operatorname{Ker} F^{k+l}$ pro nějaké $l > 1$, pak $F^{l-1}(v) \in \operatorname{Ker} F^{k+1} = \operatorname{Ker} F^k$, tedy $F^{k+l-1}(v) = 0$. Opakovaným použitím této úvahy plyne, že $v \in \operatorname{Ker} F^k$, tím je dokázáno první tvrzení. Věta o dimenzi jádra a obrazu

$$\dim \operatorname{Ker} F^k + \dim \operatorname{Im} F^k = \dim V$$

a inkluze $\forall i \in \mathbb{N}, \operatorname{Im} F^i \geq \operatorname{Im} F^{i+1}$ dávají okamžitě druhé. Pro třetí stačí dokázat, že každý vektor $v \in \operatorname{Ker} F^k \cap \operatorname{Im} F^k$ už musí být nulový. Takový vektor lze ale psát jako $v = F^k(w)$, kde $F^{2k}(w) = 0$, čili $w \in \operatorname{Ker} F^{2k} = \operatorname{Ker} F^k$. Tedy $v = F^k(w) = 0$.

Pokud $v \in F(\operatorname{Ker} F^k)$, pak pro $w \in \operatorname{Ker} F^k$ takové, že $F(w) = v$ platí $0 = F^{k+1}(w) = F^k(v)$, tedy $v \in \operatorname{Ker} F^k$. Poslední tvrzení je nejjednodušší: platí $F(\operatorname{Im} F^k) = \operatorname{Im} F^{k+1} = \operatorname{Im} F^k$. □

Aplikujeme-li lemma na $F = f_\lambda$, kde λ je vlastní číslo f, dostáváme, že $\operatorname{Ker} f_\lambda^k$ je právě zobecněný vlastní podprostor V_λ a $\operatorname{Im} f_\lambda^k$ je jeho doplněk. Později ukážeme, že $\operatorname{Im} f_\lambda^k$ je právě direktním součtem všech ostatních zobecněných vlastních podprostorů, takže vzhledem k bázi sestavené z bází jednotlivých V_λ má matice f blokově diagonální strukturu.

Pokud $\lambda \notin \sigma(f)$, pak je f_λ regulární a lemma říká samé triviální věci

Date: 3. dubna 2011.

Nilpotentní endomorfismus

Uvažujme nejprve jednodušší případ, kdy má endomorfismus pouze jedno vlastní číslo λ algebraické násobnosti n. Posunutý endomorfismus f_λ má stejné vlastní vektory a tedy jeho jediným vlastním číslem je 0, také s násobností n. Podle poslední části lemmatu zobrazuje f_λ podprostor $\operatorname{Im} f_\lambda^k$ izomorfně na sebe. Kdyby podprostor $\operatorname{Im} f_\lambda^k$ nebyl nulový, pak by na něm f_λ mělo vlastní číslo, které by nemohlo být ani nulové (izomorfismus), ani nenulové (předpoklad nulovosti všech vlastních čísel f_λ). Tedy nutně $\operatorname{Im} f_\lambda^k = 0$, $\operatorname{Ker} f_\lambda^k = V$. Poslední rovnost znamená, že pro každý vektor $v \in V$ platí $f_\lambda^k(v) = 0$. Zobrazení s touto vlastností se nazývají **nilpotentní** a o k mluvíme jako o **stupni nilpotence**. Dokázali jsme tím jeden směr následující ekvivalence:

Lemma. *Endomorfismus F vektorového prostoru V je nilpotentní, právě když jeho jediné vlastní číslo je nula.*

Opačná implikace je jednoduchá a přenecháváme ji za cvičení.

Pro lepší čitelnost označme f_λ již osvědčeným symbolem F. Máme tedy řetězec podprostorů

$$0 \leq \operatorname{Ker} F \leq \operatorname{Ker} F^2 \leq \dots \operatorname{Ker} F^k \equiv V,$$

v němž už jsou všechny inkluze prosté. Můžeme sestavit řetízek vektorů

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \equiv \operatorname{Im} F^k & \leq & \operatorname{Im} F^{k-1} & \leq & \operatorname{Im} F^{k-2} & \leq \cdots \leq & \operatorname{Im} F^2 & \leq & \operatorname{Im} F & \leq & V \\
\Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup & & \Cup \\
0 & \leftarrow & F^{k-1}(v) & \leftarrow & F^{k-2}(v) & \leftarrow \cdots \leftarrow & F^2(v) & \leftarrow & F(v) & \leftarrow & v \\
\Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap & & \Cap \\
0 & \leq & \operatorname{Ker} F & \leq & \operatorname{Ker} F^2 & \leq \cdots \leq & \operatorname{Ker} F^{k-2} & \leq & \operatorname{Ker} F^{k-1} & \leq & \operatorname{Ker} F^k
\end{array}$$

ve kterém jsou všechny vektory nenulové a jak uvidíme za chvilku, dokonce lineárně nezávislé. Pokud by vektory v řetízku už tvořily bázi V, vidíme, že vzhledem k této bázi (psané proti směru šipek) má endomorfismus F matici

$$J_{0,k} := \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

která se nazývá **Jordanova buňka** stupně k příslušná vlastnímu číslu 0.

Existují v zásadě dvě cesty, jak řetízek zkonstruovat. Jedna možnost je zvolit libovolný vektor $v \in \operatorname{Ker} F^k \equiv V$, který neleží v $\operatorname{Ker} F^{k-1}$ a postupně ho zobrazit endomorfismy F až F^{k-1}. Ekvivalentním postupem je vybrat vektor z $\operatorname{Im} F^{k-1}$ a najít jeho vzory v těchto endomorfismech. První možnost bývá jednodušší, protože výpočet obrazu znamená násobení matic, kdežto hledání vzoru je řešení nehomogenní soustavy rovnic. V praxi tedy obvykle zvolíme nějaký podprostor W_k takový, že $\operatorname{Ker} F^{k-1} \oplus W_k = V$, v něm bázi $\{v_1^k, \dots, v_{i_k}^k\}$ a z ní vyrobíme i_k řetízků délky k. Vektory $F(v_1^k), \dots, F(v_{i_k}^k)$ o úroveň níž jsou v $\operatorname{Ker} F^{k-1}$, ale nejsou v $\operatorname{Ker} F^{k-2}$, doplníme je vektory $v_1^{k-1}, \dots, v_{i_{k-1}}^{k-1}$ na bázi nějakého podprostoru W_{k-1} takového, že $\operatorname{Ker} F^{k-2} \oplus W_{k-1} = \operatorname{Ker} F^{k-1}$, a zkonstruujeme z nich i_{k-1} řetízků délky $k-1$.

Tímto způsobem dospějeme ke struktuře postupně se zkracujících řetízků

$$
\begin{array}{cccccccc}
0 \leftarrow & F^{k-1}(v_1^k) & \leftarrow & F^{k-2}(v_1^k) & \leftarrow \cdots \leftarrow & F(v_1^k) & \leftarrow & v_1^k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 \leftarrow & F^{k-1}(v_{i_k}^k) & \leftarrow & F^{k-2}(v_{i_k}^k) & \leftarrow \cdots \leftarrow & F(v_{i_k}^k) & \leftarrow & v_{i_k}^k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 \leftarrow & F^{k-2}(v_1^{k-1}) & \leftarrow & F^{k-3}(v_1^{k-1}) & \leftarrow \cdots \leftarrow & v_1^{k-1} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 \leftarrow & F^{k-2}(v_{i_{k-1}}^{k-1}) & \leftarrow & F^{k-3}(v_{i_{k-1}}^{k-1}) & \leftarrow \cdots \leftarrow & v_{i_{k-1}}^{k-1} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \iddots & & & \\
0 \leftarrow & F(v_1^2) & \leftarrow & v_1^2 & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
0 \leftarrow & F(v_{i_2}^2) & \leftarrow & v_{i_2}^2 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
0 \leftarrow & v_1^1 & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
0 \leftarrow & v_{i_1}^1 & & & & & & \\
 & \pitchfork & & \pitchfork & & \pitchfork & & \pitchfork \\
0 \leq & \operatorname{Ker} F & \leq & \operatorname{Ker} F^2 & \leq \cdots \leq & \operatorname{Ker} F^{k-1} & \leq & V,
\end{array}
$$

O této množině vektorů M_λ budeme chtít ukázat, že je to báze V. K tomu bude výhodnější konstruovat řetízky zdola, tedy:

(1) Zvolit libovolnou bázi $\{w_1^{k,1}, \dots, w_{i_k}^{k,1}\}$ prostoru $\operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Im} F^{k-1}$.
(2) Ke každému $w_i^{k,1}$ zkonstruovat řetízek vektorů $w_i^{k,2} \leftarrow \ldots \leftarrow w_i^{k,k}$, který jím končí.
(3) Doplnit bázi $\{w_1^{k,1}, \dots, w_{i_k}^{k,1}\}$ na bázi $\operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Im} F^{k-2}$ nějakými vektory $w_1^{k-1,1}, \dots, w_{i_{k-1}}^{k-1,1}$.
(4) Ke každému vektoru $w_i^{k-1,1}$ zkonstruovat řetízek $w_i^{k-1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow w_i^{k-1,k-1}$.
(5) Pokračovat až do doplnění na bázi celého $\operatorname{Ker} F$ (nejnižšího patra) vektory $w_1^{1,1}$ až $w_{i_1}^{1,1}$, které samy o sobě tvoří řetízky délky 1.

Je takto získaná množina vektorů lineárně nezávislá? Uvažujme netriviální lineární kombinaci $\sum_{r,p,q} a_r^{pq} w_r^{pq} = 0$, která má v „patře“ $q = Q$ alespoň jeden nenulový koeficient a ve všech vyšších patrech jsou všechny koeficienty nulové. Aplikujeme-li F^{Q-1}, zobrazí se vektory všech nižších pater na nulu a vektory $F^{Q-1}(w_r^{pQ})$ patří do nejnižšího patra: získáme tedy netriviální lineární kombinaci $\sum_{r,p} a_r^{pQ} w_r^{p1} = 0$. Vektory nejnižšího patra, tedy $\operatorname{Ker} F$, byly ale zvoleny jako lineárně nezávislé, což je spor s předpokladem nenulovosti alespoň jednoho a_r^{pQ}.

Generuje množina M_λ celé V? Pro libovolný vektor $w \in V$ existuje díky nilpotenci F nějaké nejmenší $Q \in \mathbb{N}$ takové, že $F^Q(w) = 0$ a $F^{Q-1}(w) \neq 0$. Mezi vektory $w \notin \langle M_\lambda \rangle$ vyberme takový, pro nějž je toto Q minimální. Protože $F^{Q-1}(w) \in \operatorname{Ker} F$, lze napsat $F^{Q-1}(w)$ jako lineární kombinaci

$$w = \sum_{r,p} a_r^{p,Q} w_r^{p,1} = \sum_{r,p} a_r^{p,Q} F^{Q-1}(w_r^{p,Q})$$

Vektor

$$w' := w - \sum_{r,p} a_r^{p,Q} w_r^{p,Q}$$

je tedy v $\operatorname{Ker} F^{Q-1}$ a zároveň není v $\langle M_\lambda \rangle$, což je spor s volbou w.

Můžeme tedy zformulovat následující tvrzení:

Věta (Jordanova báze nilpotentního endomorfismu)**.** *Nechť F je nilpotentní endomorfismus prostoru V. Pak existuje báze $M \subset V$ taková, že matice F vzhledem k ní má blokově diagonální tvar*

$$\begin{pmatrix} J_{0,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{0,k_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{0,k_r} \end{pmatrix},$$

kde $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_r$. Navíc pro všechny takové báze je posloupnost čísel $k_1, \ldots, k_r$ stejná.

Důkaz. Sestrojme a uspořádejme řetízky, jak je výše popsáno. Jejich vektory tvoří bázi V, a tedy V je direktním součtem lineárních obalů jednotlivých řetízků. Je zřejmé, že vzhledem k blokové struktuře dané těmito řetízky jsou na diagonále Jordanovy buňky a mimo diagonálu nuly. Stupně Jordanových buněk k_1 až k_r jsou rovny délkám řetízků, $r = \dim \operatorname{Ker} F$. Ověření jednoznačnosti přenecháváme čtenáři za cvičení. □

Protože jsme označili $F \equiv f_\lambda = f - \lambda 1_V$, znamená to, že matice homomorfismu f má tvar

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda,k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda,k_r} \end{pmatrix},$$

kde

$$J_{\lambda,k} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

je Jordanova buňka příslušná vlastnímu číslu λ.

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $(\lambda-3)^4$, takže jediným vlastním číslem matice

$$A-3E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je nula a tedy je to matice nilpotentní. Vidíme, že $h(A-3E)=2$, tedy geometrická násobnost vlastního čísla 3 je

$$\dim \operatorname{Ker}(A-3E)=4-h(A-3E)=2$$

Spočteme mocniny $A-3E$:

$$(A-3E)^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A-3E)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stupeň nilpotence $A-3E$ je 3 a to bude také délka nejdelšího řetízku. Potřebujeme už jen jeden vektor, abychom měli čtyři do báze, takže zbývající řetízek musí mít délku 1. Jordanův tvar matice A je proto

$$J_A:=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nyní najdeme Jordanovu bázi. Horním vektorem dlouhého řetízku může být libovolný vektor mimo $\operatorname{Ker}(A-3E)^2$, například $v=(1,0,0,0)^T$. Jeho obrazy pomocí $(A-3E)$ a $(A-3E)^2$ jsou

$$(A-3E)v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-3E)^2v=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $(A-3E)^2v$ už je v $\operatorname{Ker}(A-3E)$, které má dimenzi 2. Libovolný vektor z $\operatorname{Ker}(A-3E)$, který není násobkem $(-1,-1,0,1)^T$, můžeme vzít jako zbývající řetízek délky 1, například $(0,0,1,0)^T$. Homomorfismus f_A má pak matici J_A vzhledem k bázi

$$M=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

a platí

$$A\equiv (f_A)_{KK}=(1)_{KM}(f_A)_{MM}(1)_{MK}=$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že výpočet $(A-3E)^3$ už nebyl nutný: jakmile jsme zjistili , že $h((A-3E)^2)=1$, bylo jasné, že v dalším kroku musí hodnost klesnout na nulu. V tu chvíli už bylo také jasné, že řetízky budou délek 3 a 1, protože jsme z $\dim \operatorname{Ker}(A-3E)$ věděli, že budou dva a kdyby měly oba délku 2, pak by stupeň nilpotence $A-3E$ musel být také 2. Jordanova báze, jak vidno, není jednoznačně určena, vždy máme určitou volnost při volbě vektorů, které jsou vrcholy řetízků.

Příklad. Uvažujme vektorový prostor $V = P^n(x, \mathbb{C})$ a na něm zobrazení $f = \frac{d}{dx}$. Je zřejmé, že je to nilpotentní zobrazení stupně $n+1$ a že báze V je tvořena jediným řetízkem:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow x \leftarrow \tfrac{x^2}{2} \leftarrow \cdots \leftarrow \tfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} \leftarrow \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leftarrow \tfrac{x^n}{n!}$$

Vzhledem k této bázi má tedy zobrazení matici $J(0, n+1)$.

Pro $V = P^{2k-1}(x, \mathbb{C})$ a $f = \frac{d^2}{dx^2}$ je stupeň nilpotence k a $\operatorname{Ker} f = \langle 1, x\rangle$. Očekáváme tedy dva řetízky. Oba začínají ve $V \setminus \operatorname{Ker} f^k$ a za jejich začátky můžeme zvolit nějaké násobky x^{2k-1} a x^{2k-2}. Dostáváme tedy

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow \tfrac{x^2}{2} \leftarrow \tfrac{x^4}{4!} \leftarrow \cdots \leftarrow \tfrac{x^{2k-4}}{(2k-4)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

$$0 \leftarrow x \leftarrow \tfrac{x^3}{3!} \leftarrow \tfrac{x^5}{5!} \leftarrow \cdots \leftarrow \tfrac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

a matice f má vzhledem k této bázi (seřazené po řádcích) blokově diagonální tvar

$$\begin{pmatrix} J_{0,k} & 0 \\ 0 & J_{0,k} \end{pmatrix}$$

Stejné zobrazení na $V = P^{2k}(x, \mathbb{C})$ má stejnou dimenzi jádra, takže znovu dva řetízky. Stupeň nilpotence je o jedna větší, $\langle x^{2k}\rangle$ je doplněk $\operatorname{Ker} f^k$ ve V, jeho obrazy vytvářejí řetízek končící $(2k)!$. Druhý vektor řetízku $f(x^{2k}) = 2kx^{2k-2}$ leží v $\operatorname{Ker} f^k \setminus \operatorname{Ker} f^{k-1}$, rozdíl dimenzí je ale 2. Stačí doplnit vektor x^{2k-1} a

$$\langle x^{2k-2}, x^{2k-1}\rangle \oplus \operatorname{Ker} f^{k-1} = \operatorname{Ker} f^k$$

Druhý řetízek vzniklý zobrazením (nějakého násobku) x^{2k-1} už spolu s (také pro přehlednost přeškálovaným) prvním dává bázi V:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow \tfrac{x^2}{2} \leftarrow \tfrac{x^4}{4!} \leftarrow \cdots \leftarrow \tfrac{x^{2k-4}}{(2k-4)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$0 \leftarrow x \leftarrow \tfrac{x^3}{3!} \leftarrow \tfrac{x^5}{5!} \leftarrow \cdots \leftarrow \tfrac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} \leftarrow \tfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

a Jordanova matice je

$$\begin{pmatrix} J_{0,k+1} & 0 \\ 0 & J_{0,k} \end{pmatrix}$$

Jordanův tvar matice

Obraťme nyní pozornost k obecnému případu, kdy homomorfismus f může mít více různých vlastních čísel.

Lemma. *Nechť $f \in \operatorname{End}(V)$. Pak $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(f)} V_\lambda$.*

Důkaz. Nechť $\lambda \in \sigma(f)$, připomeňme, že $V = V_\lambda \oplus W$, kde oba podprostory jsou invariantní vůči f_λ a stejně tak i vůči f, jež se od f_λ liší jen o násobek identity. Ověříme nejprve, že všechny ostatní zobecněné vlastní podprostory leží ve W, tím bude dokázáno, že jejich spojení má s V_λ nulový průnik, a tedy že všechny zobecněné vlastní podprostory tvoří direktní součet.

Nechť $\mu \in \sigma(f)$, $\mu \neq \lambda$. Mezi všemi vektory V_μ, které nepatří do W, vyberme w z $\operatorname{Ker} f_\mu^Q$ pro Q co nejmenší. Aplikace binomické věty dává

$$0 = (f_\mu + (\mu - \lambda)1_V)^k(w) - f_\lambda^k(w) = (\mu - \lambda)^k w + \sum_{i=1}^{k} c_i f_\mu^i(w) - f_\lambda^k(w)$$

kde $c_i \in \mathbb{C}$. Všechny členy v sumě patří do $\operatorname{Ker} f_\mu^{Q-1}$, což je dle výběru w už podmnožina $W = \operatorname{Im} f_\lambda^k$. Máme tedy vyjádření vektoru w jakožto lineární kombinace prvků W, volili jsme jej ale tak, aby ve W nebyl, to je spor.

Je direktním součtem všech V_λ celé V? Dokažme to indukcí podle počtu různých vlastních čísel. Případ jediného vlastního čísla už jsme dokazovali. Předpokládejme, že pro všechny endomorfismy s méně než m různými vlastními čísly tvrzení platí. Nechť f má m různých vlastních čísel, máme rozklad $V = V_{\lambda_m} \oplus W$, v němž $f(W) \subset W$ a $f_{\lambda_m}(W) = W$. Vlastní čísla f zúženého na W musí být podmnožinou vlastních čísel f na celém V a dle předchozího platí $V_{\lambda_i} \subset W$ pro všechna $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Takže f má na W vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$, podle indukčního předpokladu $W = \bigoplus_{i=1}^{m-1} V_{\lambda_i}$, tedy $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$. □

Věta (Jordanův tvar matice). *Nechť $f \in \mathrm{End}(V)$. Pak existuje báze V, vzhledem k níž má matice f blokově diagonální tvar s bloky tvaru Jordanových buněk příslušných vlastním číslům f. Tyto bloky jsou určeny až na pořadí jednoznačně.*

Důkaz. Bloková struktura je vlastně dvoustupňová. Nejprve zapíšeme V jako součet $\bigoplus_{\lambda\in\sigma(f)} V_\lambda$ zobecněných vlastních podprostorů, o nichž víme, že $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$, tedy vůči jakékoli bázi respektující direktní součet bude matice blokově diagonální. V každém V_λ pak máme řetízkovou bázi, která nám dává blokovou diagonálnost uvnitř každého Jordanova bloku.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Kdyby existovaly dvě báze se dvěma různými Jordanovými tvary, pak musí být na diagonále (až na pořadí) stejná vlastní čísla, protože charakteristický polynom endomorfismu musí vyjít stejně, ať se počítá z matice vůči kterékoli bázi. Jednoznačnost rozmístění jedniček nad diagonálou pak plyne z jednoznačnosti Jordanova tvaru pro nilpotentní zobrazení. □

Důsledek. *Algebraická násobnost vlastního čísla je rovna dimenzi zobecněného vlastního podprostoru a je vždy větší nebo rovna násobnosti geometrické.*

Důsledek. *Minimálním polynomem endomorfismu f je polynom*

$$p(\lambda) = \prod_{\lambda_k\in\sigma(f)} (\lambda - \lambda_k)^{\gamma_k}$$

, kde γ_k je maximální délka řetízku v zobecněném vlastním podprostoru vlastního čísla λ_k.

Důsledek. *Dvě matice jsou si podobné, právě když mají stejný Jordanův tvar.*

Důsledek (Jordanův rozklad). *Každou čtvercovou matici A lze jednoznačně zapsat jako součet $A_D + A_N$, kde A_D je diagonalizovatelná, A_N nilpotentní a A_D komutuje s A_N.*

Platí dokonce, že A_D i A_N lze zapsat jako polynomy v matici A.

Příklad. Nechť $V = P^2(x, y, \mathbb{C}) = \langle 1, x, x^2, y, y^2, xy\rangle$ a $f = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Platí

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f(y) &= y \\ f(x) &= 1 & f(y^2) &= 2y^2 \\ f(x^2) &= 2x & f(xy) &= y + xy \end{aligned}$$

Matice f vzhledem k bázi $K = \{1, x, x^2, y, y^2, xy\}$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} =: A$$

Je horní trojúhelníková, vlastní čísla jsou tedy rovna diagonálním elementům, $\sigma(f) = \{0, 0, 0, 1, 1, 2\}$ (s násobnostmi). Proto $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$, kde $\dim V_0 = 3$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$.

Zobecněný vlastní podprostor V_2 má dimenzi 1, je tedy přímo vlastním podprostorem, generovaným vektorem y^2. Prostor V_0 nalezneme jako $\operatorname{Ker}(f - 01_V)^k$ pro nejmenší k takové, že $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$. To nastává pro $k = 3$, pak totiž

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^3 \end{pmatrix},$$

kde C^3 je regulární matice. V souřadnicích je $\operatorname{Ker} A^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, tedy $V_0 = \operatorname{Ker} f^3 = \langle 1, x, x^2 \rangle$. Začátkem řetízku může být libovolný vektor z $V_0 \setminus \operatorname{Ker} f^2$, tedy například x^2, jeho obrazy jsou postupně $2x$ a 2. Tyto tři vektory tvoří bázi V_0, takže další řetízky už ve V_0 nejsou. To je vidět i z toho, že $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Zbývá najít řetízkovou bázi ve V_1. Vidíme, že $\operatorname{Ker}(f - 1.1_V) = \langle y \rangle$, takže máme jen jeden řetízek délky 2, který končí vektorem y. Vypočítáme

$$(A - 1E)^2 = \begin{pmatrix} (B-E)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde 3×3 blok $(B - E)^2$ je regulární, takže $\operatorname{Ker}(A - E)^2 = \langle e_4, e_6 \rangle$. Za začátek řetízku lze proto zvolit například $xy \in \operatorname{Ker}(f - 1_V)^2 \setminus \operatorname{Ker}(f - 1_V)$, jeho obrazem je $(f - 1_V)(xy) = y + xy - xy = y$.

Celkově tedy máme bázi $M = \{2, 2x, x^2, y, xy, y^2\}$, kde první tři vektory tvoří bázi V_0, další dva V_1 a poslední V_2. Vzhledem k M má matice f tvar

$$\begin{pmatrix} J_{0,3} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2,1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exponenciála matice

Označení. Standardně značíme maticové elementy matice A symbolem a_{ij}. V některých případech, například u inverzní matice A^{-1}, by označení elementů (např. a_{ij}^{-1}) bylo zavádějící. Proto budeme značit ij-tý element matice A v případě potřeby také $(A)_{ij}$. Naopak (a_{ij}) bude označovat matici, jejíž elementy jsou a_{ij}.

Výpočet mocniny matice v Jordanově tvaru je jen o trochu složitější než u matice diagonální. Vzhledem k blokově diagonální struktuře stačí umět mocnit Jordanovy buňky. Matici $J := J(\lambda, k)$ lze zapsat jako $\lambda E + N$, kde N je nilpotentní matice.

Pak

$$J^q = (\lambda E + N)^q = \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i} \lambda^{q-i} N^i$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^q & q\lambda^{q-1} & \binom{q}{2}\lambda^{q-2} & \binom{q}{3}\lambda^{q-3} & \dots & \binom{q}{k-2}\lambda^{q-k+2} & \binom{q}{k-1}\lambda^{q-k+1} \\ 0 & \lambda^q & q\lambda^{q-1} & \binom{q}{2}\lambda^{q-2} & \dots & \binom{q}{k-3}\lambda^{q-k+3} & \binom{q}{k-2}\lambda^{q-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^q & q\lambda^{q-1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{q}{2}\lambda^{q-2} & \binom{q}{3}\lambda^{q-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & q\lambda^{q-1} & \binom{q}{2}\lambda^{q-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^q & q\lambda^{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^q \end{pmatrix}$$

V tomto vyjádření předpokládáme, že $\binom{q}{i} = 0$ pro $i > q$.

To je vůbec užitečná konvence. Ještě se přidává, že $\binom{q}{i} = 0$ pro $i < 0$, a člověk může psát sumu v binomické větě v mezích od $-\infty$ do ∞. Viz pěkná knížka Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics

Kdo umí počítat mocninu matice, umí počítat polynom od matice. A co takhle mocninnou řadu od matice?

Definice. Je-li $(B_q)_{q=0}^{\infty}$ posloupnost matic z $M_{mn}(\mathbb{C})$, pak matici $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ nazveme limitou $\lim_{q\to\infty} B_q$ posloupnosti, pokud $\forall i \in \{1,\dots,m\}$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ platí $\lim_{q\to\infty}(B_q)_{ij} = (B)_{ij}$.

Součet nekonečné řady matic je pak definován jako limita jejích částečných součtů.

Definici limity můžeme přeformulovat i pomocí zavedení **normy** na množině matic vztahem $\|B\| := \max_{i,j} |(B)_{ij}|$. Platí

Normu na maticích je možné zavést i mnoha jinými způsoby. Pro většinu našich potřeb je jedno, kterou použijeme.

Lemma. *Nechť $(B_q)_{q=0}^{\infty}$ je posloupnost matic z $M_{mn}(\mathbb{C})$. Pak $B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ je její limita, právě když $\lim_{q\to\infty} \|B_q - B\| = 0$.*

Důkaz. Jednoduché cvičení. □

Definice. Pro libovolnou čtvercovou matici A definujme její exponenciálu

$$\exp A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

Lemma. *Pro libovolnou čtvercovou matici je* $\exp A$ *absolutně konvergentní řada.*

Důkaz. Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Pro všechna $q \in \mathbb{N}$ platí nerovnost nerovnosti $\|A^q\| \leq n^{q-1}\|A\|^q$, která se snadno dokáže indukcí. Pro $q = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že platí pro nějaké $q \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} \|A^{q+1}\| = \|A^q A\| &= \max_{ij} |\sum_k (A^q)_{ik}(A)_{kj}| \leq \max_{ij} \sum_k |(A^q)_{ik}||(A)_{kj}| \\ &\leq n\|A\| \max_{ik} |(A^q)_{ik}| = n\|A\|\|A^q\| \leq n^q \|A\|^{q+1}, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku použili indukční předpoklad.

Pak ale pro libovolné $Q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{q=0}^{Q} \frac{1}{q!} |(A^q)_{ij}| \leq \sum_{q=0}^{Q} \frac{1}{q!} \|A^q\| \leq \sum_{q=0}^{Q} \frac{n^q}{q!} \|A\|^q = e^{n\|A\|}$$

□

Věta. *Nechť $A, B \in M_{nn}(\mathbb{C})$. Pak*

(1) *Pokud $AB = BA$, pak* $\exp(A + B) = \exp A \exp B$
(2) $\exp A$ *je regulární a* $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$
(3) $\exp(Q^{-1}AQ) = Q^{-1} \exp(A) Q$

(4) $\det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$

Důkaz. $\exp A$ a $\exp B$ jsou dvě absolutně konvergentní řady, jejich součin $\exp A \exp B$ je tedy roven řadě

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!(p-q)!} A^q B^{p-q} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} A^q B^{p-q} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (A+B)^p,$$

přičemž poslední rovnost (binomická věta) vyžadovala komutování matic A a B. Tím dostáváme první tvrzení. Druhé plyne z prvního, protože A a $-A$ komutují a $\exp 0 = E$. Třetí je důsledkem vlastnosti $QA^qQ^{-1} = (QAQ^{-1})^q$. Poslední plyne z věty o Jordanově tvaru: pokud $A = QJ_AQ^{-1}$, pak $\det \exp A = \det \exp J_A$ a $\exp \operatorname{Tr} A = \exp \operatorname{Tr} J_A$. Z tvaru mocnin Jordanových buněk vidíme, že $\exp J_A$ je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále čísla e^{λ_i}, $i \in \{1, \dots, n\}$, kde $\lambda_i \in \sigma(A)$ (ve smyslu multimnožiny). Pak ale

$$\det \exp J_A = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{\operatorname{Tr} J_A}$$

□

Jordanův tvar umožňuje explicitně spočítat exponenciálu libovolné matice. Pro jednoduchost se opět věnujme případu $A = QJQ^{-1}$, kde J je Jordanova buňka stupně n s vlastním číslem λ. Pak $J = \lambda E + N$ je rozklad na součet dvou komutujících matic, takže

$$\exp A = Q \exp(J) Q^{-1} = Q \exp(\lambda E) \exp N Q^{-1} = Q e^{\lambda} \exp N Q^{-1}$$

$$= Q e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Pokud $t \in \mathbb{C}$, lehkým zobecněním tohoto postupu plyne

$$\exp(tA) = Q e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

což, jak za chvíli uvidíme, je výsledek klíčový pro řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic.

Diferenciální rovnice

Příklad. Hledáme dvě funkce $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ splňující rovnice

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = -x_1(t) - x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt}(t) = -4x_1(t) - x_2(t)$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$. Zadání můžeme kompaktně přepsat jako

$$\dot{x} = Ax, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, x(0) = (2,1)^T$$

Taková úloha se nazývá homogenní soustavou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Ukážeme, že její obecné řešení má tvar $x = \exp(tA).c$.

Definice. Derivací maticové funkce $Q : \mathbb{R} \to M_{mn}(\mathbb{F})$ v bodě $t \in \mathbb{R}$ rozumíme

$$\lim_{h\to 0} \frac{Q(t+h) - Q(t)}{h} =: \dot{Q}(t) \equiv \frac{dQ(t)}{dt}$$

Je zřejmé, že derivací maticové funkce $Q(t)$ je matice $(\dot{q}_{ij})$, jejíž elementy jsou derivacemi maticových elementů $Q(t)$.

Lemma. *Nechť* $P, Q : \mathbb{R} \to M_{mn}(\mathbb{F}), A \in M_{np}(\mathbb{F}), B \in M_{qm}(\mathbb{F}), R : \mathbb{R} \to M_{nq}(\mathbb{F})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$.

(1) $\frac{d}{dt}(P(t) + Q(t)) = \frac{dP(t)}{dt} + \frac{dQ(t)}{dt}$
(2) $\frac{d}{dt}(Q(t)A) = \frac{dQ(t)}{dt}A$
(3) $\frac{d}{dt}(BQ(t)) = B\frac{dQ(t)}{dt}$
(4) $\frac{d}{dt}(Q(t)R(t)) = \frac{dQ(t)}{dt}R(t) + Q(t)\frac{dR(t)}{dt}$
(5) $\frac{d}{dt}(f(t)R(t)) = \frac{df(t)}{dt}R(t) + f(t)\frac{dR(t)}{dt}$
(6) *Pokud* $m = n$ *a* $Q(t)$ *je regulární, pak* $\frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}) = -Q(t)^{-1}\frac{dQ(t)}{dt}Q(t)^{-1}$
(7) *Pokud* $n = p$, *pak* $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$

Důkaz. Prvních pět tvrzení plyne okamžitě z vlastností derivace číselných funkcí. Pro šesté stačí zderivovat vztah $Q(t)Q(t)^{-1} = E$:

$Q(t)$ a $\dot{Q}(t)$ obecně nekomutují!

$$\frac{d}{dt}(Q(t))Q(t)^{-1} + Q(t)\frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}) = 0$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$|\exp(tA)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|(t+\varepsilon)^i||(A^q)_{ij}|}{i!} < e^{n(t+\varepsilon)\|A\|},$$

čili řada $\exp(tA)$ je stejnoměrně omezená absolutně konvergentní řadou v okolí libovolného $t \in \mathbb{R}$. Podle věty z matematické analýzy (viz třeba Rudin: Základy matematické analýzy, věta 7.10) lze pak řadu derivovat člen po členu:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i A^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i-1}A^i}{(i-1)!} = A\exp(tA),$$

čímž dostáváme poslední tvrzení. □

Poznámka. Poslední tvrzení se dá také dokázat čistě algebraicky přechodem k Jordanovu tvaru $\exp(tA) = U\exp(tJ)U^{-1} = U\exp(tD)\exp(tN)U^{-1}$, kde matice $\exp(tD)$ a $\exp(tN)$ explicitně známe.

Věta. *Nechť* $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}^n$. *Pak jediným řešením soustavy rovnic*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = c$$

je $x(t) = \exp(tA)c$

Důkaz. Platí, že $x(0) = \exp(0)c = Ec = c$ a

$$\dot{x}(t) = A\exp(tA)c = Ax(t)$$

Pokud by $y(t)$ bylo jiné řešení stejné úlohy, pak platí

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(-tA)y(t)) &= \exp(-tA)\dot{y}(t) + (-A)\exp(-tA)y(t)\\ &= \exp(-tA)\,[Ay(t) - Ay(t)] = 0,\end{aligned}$$

tedy $\exp(-tA)y(t) = d$ je konstatní vektor. Protože $y(0) = c$, platí $d = c$. Tedy $y(t) = \exp(tA)c \equiv x(t)$. □

Příklad. Matice A z úvodu tohoto oddílu je diagonalizovatelná, platí

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy rovnic je pak

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t + 5e^{-3t} \\ -6e^t + 10e^{-3t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Budeme-li interpretovat vektorovou funkci $(x_1(t), x_2(t))$ jako pohyb bodu v rovině, pak v souřadnicích vzhledem k Jordanově bázi má řešení tvar $x_1'(t) = c_1'e^t$, $x_2'(t) = c_2'e^{-3t}$. Bod $(s, 0)$ na vodorovné ose se tedy z počátečního stavu vzdaluje s rostoucím časem do nekonečna, bod $(0, s)$ na svislé ose konverguje k nule. Body mimo osy se pohybují po drahách trochu připomínajících hyperboly směrem k bodům $(\pm\infty, 0)$. Tyto dráhy jsou v každém bodě $x \in \mathbb{R}^2$ tečné k vektoru $V_A(x) := Ax$ a nazýváme je integrálními křivkami vektorového pole $V_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Každá 2×2 reálná matice se dvěma různými vlastními čísly je diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou buď obě reálná, nebo jsou komplexně sdružená. V druhém případě

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= Q\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & -e^{t\bar\lambda} \end{pmatrix}Q^{-1} = e^{tk}Q\begin{pmatrix} e^{it\omega} & 0 \\ 0 & e^{-it\omega} \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= e^{tk}Q\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= Pe^{tk}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

Je vidět, že P musí být reálná matice. Integrální křivka v souřadnicích vzhledem k bázi ze sloupců P má parametrické vyjádření

$$\gamma_c(t) = e^{tk}\begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \sin(t\omega) \\ -\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Pro $k = 0$ je to kružnice, pro $k < 0$ spirála směřující k $(0, 0)$, pro $k > 0$ spirála směřující k nekonečnu.

Jak vypadají integrální křivky v ostatních případech?

Věta. *Nechť $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$. Pak všechna řešení soustavy rovnic*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$$

jsou $x(t) = \exp(tA)c(t)$, kde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ je funkce splňující $\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t)$.

Důkaz. Pokud $x(t), \tilde{x}(t)$ jsou dvě řešení nehomogenní soustavy $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$, pak jejich rozdíl $x(t) - \tilde{x}(t)$ je řešením homogenní soustavy $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Stačí tedy najít partikulární řešení nehomogenní soustavy. Pokud ho budeme hledat ve tvaru $x_P(t) = \exp(tA)c(t)$, pak dosazením do rovnice dostáváme právě $\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t)$. Obecné řešení nehomogenní soustavy je

$$x(t) = \exp(tA)c(t) + \exp(tA)d = \exp(tA)(c(t) + d),$$

a protože $\frac{d}{dt}(c(t) + d) = \dot{c}(t)$, mají všechna řešení požadovaný tvar. □

Příklad. Zajímavá speciální situace nastává, když A má vlastní vektor v s vlastním číslem λ a pravá strana je ve tvaru $b(t) = e^{\mu t}v$. Pak

$$\dot{c}(t) = \exp(-tA)b(t) = e^{(\mu-\lambda)t}v,$$

čili

$$y(t) = \exp(tA)c(t) = \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\mu-\lambda)t} \exp(tA)v = \frac{1}{\mu - \lambda} e^{\mu t} v$$

Pokud λ i μ jsou ryze imaginární, popisuje výsledek periodický pohyb s úhlovou frekvencí μ a amplitudou úměrnou $\frac{1}{\mu-\lambda}$. Čím jsou si λ a μ blíže, tím více roste amplituda. Dostáváme tedy jednoduchý model rezonance při působení vnější síly s frekvencí blízkou frekvenci vlastních kmitů systému.

Cvičení

(1) **(4)** Napište všechny možné Jordanovy tvary nilpotentní matice 5x5.

(2) **(4)** Nechť $V = P^{16}(x, \mathbb{C})$, $f \in \operatorname{End}(V)$ je definováno jako třetí derivace $f(p(x)) = p'''(x)$. Najděte Jordanovu bázi a Jordanův tvar matice endomorfismu f.

(3) **(4)** Existuje na $\mathbb{C}^2$ nilpotentní zobrazení stupně 3?

(4) **(4)** Nechť N je nilponentní matice a $M = QNQ^{-1}$. Co lze říci o nilpotenci, případně stupni nilpotence matice M?

(5) **(4)** Nechť f je nilpotentní zobrazení stupně 4. Jaký je vztah mezi $\operatorname{Ker} f$ a $\operatorname{Im} f^3$?

(6) **(4)** Najděte Jordanův tvar nilpotentní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(7) **(4)** Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

(8) **(4)** Najděte Jordanův tvar matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

(9) **(4)** Dokažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

jsou podobné a najděte matici U takovou, že $UAU^{-1} = B$.

(10) **(3)** Dokažte, že pokud A, B jsou dvě komutující nilpotentní matice, pak je nilpotentní i jejich součet a součin.

(11) **(3)** Nechť J_0 je Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Najděte matici J_0^{k-1} a určete její Jordanův tvar a Jordanovu bázi.

(12) **(3)** Nechť A, B jsou dvě nilpotentní matice typu $n \times n$. Ukažte, že pro $n = 2, 3$ můžete rozhodnout o tom, zda jsou A a B podobné, pouze na základě jejich hodnosti, ale pro $n = 4$ už ne. Ukažte, že pro $n = 4$ vám stačí navíc znát hodnost jejich druhých mocnin.

(13) **(3)** Jsou všechny nilpotentní matice singulární? Jsou všechny singulární matice nilpotentní? Najděte důkaz nebo protipříklad.

(14) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

(15) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(16) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(17) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(18) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(19) **(3)** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(20) **3** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

(21) **3** Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(22) **(3)** Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $2p(x+1) - xp'(x)$.

(23) **(3)** Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p'(x) - x^2p''(x)$.

(24) **(3)** Na prostoru $\langle 1, y, x\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše jedna uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = y\frac{\partial}{\partial x}p(x,y) + (1-y)\frac{\partial}{\partial y}p(x,y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(25) **(3)** Na prostoru $\langle 1, y, x, x^2, xy, y^2\rangle$ polynomů ve dvou proměnných stupně nejvýše dva uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = x\frac{\partial}{\partial y}p(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}p(x,y)$$

Ověřte, že tento endomorfizmus je nilpotentní, najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(26) **(3)** Na prostoru $\langle x^2, xy, y^2\rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = (x-y)\frac{\partial}{\partial x}p(x,y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial y}p(x,y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(27) **(3)** Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2\rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = p(x+1, y)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(28) **(3)** Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(29) **(3)** Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(30) **(3)** Určete Jordanovy tvary matic

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(31) **(3)** Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

(32) **(3)** Zjistěte, zda jsou podobné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pokud ano, najděte matici C splňující $CAC^{-1} = B$.

(33) **(3)** Jaký je minimální polynom zobrazení $\frac{d}{dx}$ na $P^n(x, \mathbb{C})$? A zobrazení $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$?

(34) **(3)** Určete

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{42}$$

(35) **(3)** Určete

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{67}$$

(36) **(3)** Najděte nějakou $2x2$ matici A, která splňuje

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(37) **(3)** Určete pro libovolné celé n matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{n}$$

(38) **(3)** Spočtěte

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ bez použití Jordanova tvaru, pouze z definice exponenciály.

(39) **(3)** Určete

$$\exp \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(40) **(3)** Určete

$$\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

(41) **(3)** Dokažte, že pro hermitovskou matici H je matice $\exp(iH)$ unitární. Použijte definici exponenciály.

(42) **(3)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - y_2 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

(43) **(3)** Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_1 - x_3 \\ x_3' &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = -1$.

(44) **(3)** Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_2 + x_3 \\ x_3' &= 2x_3 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

(45) **(3)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$. Řešení zapište bez užití komplexních čísel.

(46) **(3)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - 3y_2 + e^t \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}$$

s obecnou poč. podmínkou.

(47) **(3)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 4y_2 + 2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 + 1 \end{aligned}$$

s poč. podmínkou $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

(48) **(2)** Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2 \rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x, y)$ předpisem

$$F(p(x,y)) = x\frac{\partial}{\partial y}p(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}p(x,y) - 2p(x, y+1)$$

Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

(49) **(2)** Nechť $V = M_n(\mathbb{C})$, $S \in V$, $f_S \in \mathrm{End}(V)$ je definováno předpisem $f_S(A) := SA - AS$. Dokažte, že pokud je S nilpotentní, pak f_S je nilpotentní. Platí opačná implikace?

(50) **(2)** Nechť p je polynom a J Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Dokažte, že

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) & \frac{p''(0)}{2!} & \dots & \frac{p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \\ 0 & p(0) & p'(0) & \dots & \frac{p^{(k-2)}(0)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & p(0) & \dots & \frac{p^{(k-3)}(0)}{(k-3)!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

(51) **(2)** Nechť A je nilpotentní matice, označme číslem k maximální délku řetízku v Jordanově bázi. Pomocí předchozí úlohy dokažte, že dva libovolné polynomy p a q splňují $p(A) = q(A)$ právě tehdy, když $p^{(i)}(0) = q^{(i)}(0)$ pro všechna $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

(52) **(2)** Dalšími funkcemi, které je možné definovat řadou na maticích podobně jako exponenciálu, jsou goniometrické a hyperbolometrické funkce. Spočítejte matici

$$\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

.

(53) **(2)** Spočítejte $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

(54) **(2)** Zjistěte, které z matic $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ jsou podobné.

(55) **(2)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Ay + f$, kde A je definováno v předchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

(56) **(2)** Řešte soustavu diferenciálních rovnic $\dot{y} = Cy + f$, kde C je definováno v předpředchozím příkladě a $f(t) = (e^{2t}, t\sin t, \cos t)^T$.

(57) **(2)** Obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

převeďte substitucí $z(t) := y'(t)$ na soustavu dvou rovnic prvního řádu. Rovnici vyřešte pro případ $a = 2$, $b = 1$. Zobecněte na případ jedné diferenciální rovnice n-tého řádu, napište matici vzniklé soustavy rovnic a její charakteristický polynom.

(58) **(1)** Dokažte, že pokud je N nilpotentní matice, pak $E - N$ je regulární, a určete $(E - N)^{-1}$.

(59) **(1)** Dokažte, že každá matice je limitou posloupnosti diagonalizovatelných matic. Odvoďte z toho důkaz Cayley-Hamiltonovy věty.

(60) **(1)** Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A platí, že A je podobná A^T.

(61) **(1)** A je komplexní matice $n \times n$ a $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ je n vektorů v C^n závislých na $t \in R$, které řeší soustavu rovnic $x'(t) = Ax(t)$. Zjistěte, jakou diferenciální rovnici splňuje funkce $W(t) = \det(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ a dokažte pomocí toho, že vektory jsou lineárně nezávislé pro všechna t, právě když jsou lineárně nezávislé pro nějaké t.

(62) **(1)** Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^n$ je posloupnost vektorů, definujme operátor první diference takto: $(\Delta f)_j(i) := f_j(i+1) - f_j(i)$ a násobení maticí A klasicky takto: $(Af)_j(i) = \sum a_{jk} f_k(i)$. Ukažte, že soustava diferenčních rovnic prvního řádu $\Delta f = Af$ má řešení $f(i) = (A+E)^i f(0)$. Ukažte, že rekurentní relaci tvaru $g(i+m) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k g(i+k) = 0$, kde $g : N \to C$ lze převést na soustavu m diferenčních rovnic prvního řádu.