ZÁPISEK PRVNÍ O DIAGONALIZACI MATIC

LAF, LS10/11, DALIBOR ŠMÍD

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vektorové prostory v tomto a následujícím oddíle budou mít všechny konečnou dimenzi a budou komplexní.

Definice. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** endomorfismu $f \in \mathrm{End}(V)$, pakliže pro nějaký nenulový vektor $v \in V$ platí $f(v) = \lambda v$. Každý vektor, který toto splňuje, se nazývá **vlastním vektorem** f příslušným vlastnímu číslu λ.

Poznámky:

(1) Pokud v, w jsou vlastní vektory f příslušné λ, pak $\forall a, b \in \mathbb{C}$ je $av + bw$ vlastním vektorem f příslušným λ. Lze tedy mluvit o **vlastním podprostoru** příslušném vlastnímu číslu λ. Do vlastního podprostoru patří i nulový vektor, ale samotný nulový podprostor podle definice není vlastním podprostorem.
(2) Zobrazení $f : P^n(x, \mathbb{C}) \to P^n(x, \mathbb{C})$ definované jako derivace polynomu $[f(p)](x) := p'(x)$ má jediné vlastní číslo 0, příslušný vlastní podprostor je tvořen konstantními polynomy.
(3) Zvolíme-li bázi $M \subset V$, pak $f(v) = \lambda v$ znamená $(f)_{MM}(v)_M = \lambda(v)_M$. Mluvíme pak o vlastních číslech (a vektorech) matice $(f)_{MM}$.
(4) Pro diagonální matici $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ jsou vlastními čísly matice D její diagonální prvky $d_1, \ldots, d_n$ a příslušné vlastní vektory jsou prvky kanonické báze $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$. Matici horní nebo dolní trojúhelníková se stejnou diagonálou má stejná vlastní čísla, ale jiné vlastní vektory.
(5) Pokud $Ax = \lambda x$ a A je regulární, pak $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$, čili inverzní matice má stejné vlastní vektory, ale převrácená vlastní čísla.
(6) Pokud $A = Q^{-1}BQ$, pak $Ax = \lambda x$ znamená $BQx = \lambda Qx$, tedy λ je vlastním číslem B s vlastním vektorem Qx. Podobné matice mají tedy stejná vlastní čísla. To je vlastně jen důsledek skutečnosti, že vlastní čísla endomorfismu jsou vlastními čísly jeho matice vzhledem ke kterékoli bázi prostoru V.
(7) Číslo λ je vlastní číslo f právě když endomorfismus $f - \lambda 1_V$ má netriviální jádro. Jeho (libovolná) matice $(f)_{MM} - \lambda E$ je v takovém případě singulární, jinými slovy, $\det((f)_{MM} - \lambda E) = 0$.

Definice. Charakteristickým polynomem endomorfismu f rozumíme

$$p_f(\lambda) := \det(A - \lambda E),$$

kde $A = (f)_{MM}$ vzhledem k nějaké bázi M. Množinu všech kořenů p_f nazýváme **spektrum endomorfismu** f, značíme $\sigma(f)$.

Poznámky:

Date: 3. dubna 2011.

(1) Charakteristický polynom nezávisí na volbě báze. Pokud $B = QAQ^{-1}$ je matice f vzhledem k jiné bázi, pak

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda E) &= \det(QAQ^{-1} - \lambda QQ^{-1})\\ &= \det Q \det(A - \lambda E) \det Q^{-1} = \det(A - \lambda E)\end{aligned}$$

(2) Podobně jako u vlastních čísel a vektorů zavádíme **charakteristický polynom matice** $p_A(\lambda)$ a **spektrum matice** $\sigma(A)$.
(3) Spektrum je definováno jako množina, ale často se mlčky předpokládá, že nese informaci i o násobnosti kořenů. Je to tedy striktně vzato tzv. multimnožina.
(4) Spektrum je vždy neprázdné, protože každý polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen (Základní věta algebry). S násobnostmi má každý endomorfismus $f \in \mathrm{End}(V)$ právě $\dim V$ vlastních čísel.
(5) Protože $p_A = p_{A^T}$, je $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.
(6) Absolutní člen polynomu je roven jeho hodnotě v nule, proto absolutním členem $p_A(\lambda)$ je $\det A$.
(7) Charakteristický polynom lze rozepsat

$$\det(A - \lambda E) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda) + \ldots = (-\lambda)^n + \sum_{i=1} a_{ii}(-\lambda)^{n-1} + \ldots,$$

kde členy označené trojtečkou nemohou obsahovat λ ve vyšší mocnině než $n-2$. Celkově tedy

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \mathrm{Tr}\, A(-\lambda)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} A_i(-\lambda)^i + \det A$$

Popsat čísla A_i je trochu komplikovanější, ale ne o moc: jsou to součty všech hlavních minorů matice A stupně i.
(8) Pomocí Viètových vztahů se dají koeficienty p_A vyjádřit v termínech vlastních čísel. Pokud $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ jakožto multimnožina, pak například $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ a $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Věta (Cayleyova-Hamiltonova)**.** *Pokud dosadíme matici A do jejího charakteristického polynomu, dostaneme nulovou matici, čili $p_A(A) = 0$.*

Důkaz. Z věty o rozvoji determinantu podle řádku máme

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} - \lambda\delta_{ik})(-1)^{j+k}(A - \lambda E)_{(j),(k)} = p_A(\lambda)\delta_{ij}$$

Každý první minor $(A - \lambda E)_{(j),(k)}$ je polynom stupně nejvýše $n-1$, označme jeho koeficienty takto:

$$(-1)^{j+k}(A - \lambda E)_{(j),(k)} =: (B_0)_{kj} + (B_1)_{kj}\lambda + \ldots + (B_{n-1})_{kj}\lambda^{k-1}$$

Získali jsme n matic B_i splňujících vztahy

$$\begin{aligned} AB_0 &= p_0 E\\ AB_1 - B_0 &= p_1 E\\ &\vdots\\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= p_{n-1}E\\ B_{n-1} &= p_n E,\end{aligned}$$

kde p_i jsou koeficienty $p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$. Nyní stačí vynásobit i-tou rovnici maticí A^{i-1} a všechny sečíst, dostaneme $0 = p_A(A)$. □

Poznámka. Proč nefunguje důkaz $p_A(A) = \det(A - AE) = 0$? Dosadit matici B do polynomu $p_A(\lambda)$ lze, stejně jako spočítat $\det(A - BE)$. Ale $p_A(B)$ je matice, kdežto $\det(A - BE)$ číslo, čili to nemůže být totéž.

Příklady:

(1) Matice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
mají obě charakteristický polynom λ^2, jediným vlastním číslem je nula. Mají ale různou hodnost, tedy nemohou být podobné. Podobné matice tedy mají stejné charakteristické polynomy, ale opačná implikace neplatí. Vlastním vektorem první matice je kterýkoli vektor v $\mathbb{C}^2$, zatímco vlastní vektor druhé matice je $e_1 \equiv (1, 0)$ (a jeho násobky).

(2) Matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
má charakteristický polynom $-\lambda^3$ a podle Cayleovy-Hamiltonovy věty platí $A^3 = 0$, což je hned vidět i z matice samotné. Platí dokonce $A^2 = 0$, tedy matice nuluje i polynom $m_A(\lambda) = \lambda^2$. Polynom $m_A(\lambda)$ má nejmenší možný stupeň mezi všemi polynomy, které dávají nulu po dosazení A, takový polynom se nazývá **minimální polynom matice** A. Vidíme, že charakteristický polynom obecně není minimálním polynomem matice. Jaké jsou vlastní vektory A?

(3) Charakteristický polynom matice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
je
$$(-\lambda)^2 + \operatorname{Tr} A(-\lambda) + \det A = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$
Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2$ tedy hledáme vektory $x \in \mathbb{C}^2$ splňující $(A - 2E)x = 0$, čili řešení homogenní soustavy rovnic s maticí
$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$
Vlastní podprostor příslušný 2 je tedy $\langle v_1 \rangle$, kde $v_1 = (1, -3)$. Podobně vlastní podprostor příslušný $\lambda_2 = 4$ je lineární obal $v_2 = (1, -1)$. Vidíme, že množina $M = \{v_1, v_2\}$ je báze $\mathbb{C}^2$. Pokud budeme chápat A jako matici homomorfismu f_A vzhledem ke kanonickým bázím, pak
$$\begin{aligned}(f_A)_{MM} &= (1)_{MK}(f_A)_{KK}(1)_{KM} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$
V bázi z vlastních vektorů má tedy matice diagonální tvar, což odpovídá tomu, že tyto vektory homomorfismus f_A jenom vynásobí příslušným vlastním číslem.

(4) Rotace o úhel $\alpha \neq k\pi$ ve dvojrozměrném prostoru na první pohled vlastní vektory mít nemůže, protože žádný směr se při otočení nezobrazí na svůj násobek. Uvažujme pro jednoduchost rotaci o $\frac{\pi}{2}$, která je dána maticí
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom $\lambda^2 + 1$ má kořeny $\pm i$, příslušné vlastní vektory jsou $(1, \pm i)$ a diagonalizace vypadá

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že vlastní čísla a vektory existují díky tomu, že jsme se rozhodli celou úlohu řešit v komplexním prostoru.

Diagonalizovatelnost matice

Pokud λ je vlastní číslo $f \in \mathrm{End}(V)$, pak příslušným vlastním podprostorem je $\mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$. Dimenzi tohoto podprostoru V nazýváme **geometrickou násobností** vlastního čísla λ, abychom ji rozlišili od **násobnosti algebraické**, definované jako jeho násobnost coby kořenu p_f. Tyto násobnosti se obecně mohou lišit, jak ukazuje první příklad výše. Jejich rovnost je kritériem, kdy je možné matici převést na diagonální tvar:

Věta (Kritérium diagonalizovatelnosti matice)**.** *Nechť $f \in \mathrm{End}(V)$. Pokud se pro každé vlastní číslo rovnají jeho algebraická a geometrická násobnost, pak existuje báze V sestávající z vlastních vektorů f. V této bázi má matice f diagonální tvar s vlastními čísly na diagonále.*

Důkaz. Pro každý prvek $\sigma(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, kde λ_i jsou vzájemně různá vlastní čísla s algebraickými násobnostmi $m_1, \dots, m_q$, označme $V_i := \mathrm{Ker}(f - \lambda_i 1_V)$. Uvažujme libovolnou q-tici nenulových vektorů $v_1, \dots, v_q$, přičemž $v_i \in V_i$. Ukážeme, že jsou lineárně nezávislé. Pokud by nebyly, mohli bychom z nich vybrat lineárně nezávislou vlastní podmnožinu $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, která má stejný lineární obal jako $\{v_1, \dots, v_q\}$. Pro $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ lze v_j vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních $v_j = \sum_{p=1}^k \nu_p v_{i_p}$. Pak ale

$$\lambda_j \sum_{p=1}^k \nu_p v_{i_p} = \lambda_j v_j = f(v_j) = \sum_{p=1}^k \nu_p f(v_{i_p}) = \sum_{p=1}^k \nu_p \lambda_{i_p} v_{i_p}$$

Tedy $\sum_{p=1}^k \nu_p(\lambda_{i_p} - \lambda_j) v_{i_p} = 0$. Protože jsme vlastní čísla brali vzájemně různá a ν_p také nemohou být všechny nula, dostáváme spor s lineární nezávislostí $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$.

Lineární nezávislost libovolné q-tice $v_1, \dots, v_q$, $v_i \in V_i$ znamená, že žádný podprostor V_i není ve spojení $\bigvee_{i \neq j} V_j$ všech ostatních. Proto prostory V_i tvoří direktní součet, jeho dimenze $n' := \dim \bigoplus_{i=1}^q V_i$ je rovna součtu dimenzí jednotlivých V_i, tedy součtu geometrických násobností všech vlastních čísel. Pokud se rovnají algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel, pak n' je rovno stupni charakteristického polynomu, čili $\dim V$. Pak ale $V = \bigoplus_{i=1}^q V_i$ a bázi V lze zkonstruovat jako $M := \bigcup_{i=1}^q M_i$, kde M_i je libovolná báze V_i.

Tvar matice f v bázi M plyne z definice matice homomorfismu. $\square$

Poznámky:

(1) Speciálním případem je tzv. prosté spektrum, kdy mají všechna vlastní čísla algebraickou násobnost 1. Z důkazu věty plyne, že když ke každému vlastnímu číslu zvolíme libovolný vlastní vektor, bude tato množina lineárně nezávislá. Protože je vlastních čísel n, musí to být báze. Z toho je vidět, že v takovém případě jsou všechny geometrické násobnosti také jedna.

(2) Pokud $B = QAQ^{-1}$, pak

$$B^n = QAQ^{-1}QAQ^{-1} \dots QAQ^{-1} = QA^nQ^{-1}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix},$$

představuje diagonalizace nástroj k výpočtu libovolné mocniny, potažmo libovolného polynomu matice.

Blokový zápis matice

Pokud $U = V \oplus W$ je vektorový prostor, je možné každý vektor $u \in U$ jednoznačně rozložit na součet $u = v + w$, kde $v \in V$ a $w \in W$. Nechť f je lineární zobrazení z U do X a $X = Y \oplus Z$. Pak $f(u) = f(v) + f(w) \in X$ a každý sčítanec je možné rozložit na součet vektoru z Y a ze Z. Dostáváme tak čtyři zobrazení

$$\begin{aligned} g &: V \to Y \\ h &: V \to Z \\ i &: W \to Y \\ j &: W \to Z, \end{aligned}$$

která představují dohromady jiné ekvivalentní vyjádření f. Pro libovolné báze $N \subset V$ a $O \subset W$ je jejich sjednocení $M = N \cup O$ bází U, podobně lze sestrojit bázi $P = Q \cup R$ prostoru X ze dvou bází $Q \subset Y$ a $R \subset Z$. Matice f vzhledem k této bázi je

$$(f)_{PM} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde $A = (g)_{QN}$, $B = (i)_{QO}$, $C = (h)_{RN}$ a $D = (j)_{RO}$. Složení s homomorfismem $f' : X \to X'$, kde $X' = Y' \oplus Z'$ s bázemi $P' = Q' \cup R'$ lze názorně chápat jako diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[ddr, "h"] & Y \arrow[r, "g'"] \arrow[ddr, "h'"] & Y' \\ \oplus & \oplus & \oplus \\ W \arrow[r, "j"] \arrow[uur, "i"] & Z \arrow[r, "j'"] \arrow[uur, "i'"] & Z' \end{tikzcd}$$

a jeho matice je

$$(f' \circ f)_{P'M} = (f')_{P'P}(f)_{PM} =$$
$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A + B'C & A'B + B'D \\ C'A + D'C & C'B + D'D \end{pmatrix},$$

kde například

$$A'B + B'D = (g')_{Q'Q}(i)_{QO} + (i')_{Q'R}(j)_{RO}$$

v diagramu odpovídá složení šipek podle obou možných cest jdoucích z W do Y'. Tedy násobení blokových matic je formálně podobné násobení matic s čísly, pouze nesmíme zapomínat, že matice nekomutují a tedy $A'B + B'D$ není totéž co $BA' + DB'$

Přesněji že to druhé vůbec nemusí dávat smysl.

Obecně mohou být vektorové prostory U a X direktním součtem více podprostorů, $U = \bigoplus_{j=1}^{n} U_j$, $X = \bigoplus_{i=1}^{m} X_i$, s bázemi danými sjednocením bází direktních sčítanců $M = \bigcup M_j$, $M_j \subset U_j$, $N = \bigcup N_i$, $N_i \subset X_i$. Každý vektor $x \in X$ je možné zapsat jednoznačně jako $\sum x_j$, kde $x_j \in X_j$, což definuje pro každé j zobrazení $\pi_j : X \to X_j$, které vektoru x přiřadí jeho projekci x_j. Lze pak zavést lineární zobrazení

Nejde o projekci ortogonální, protože o skalárním součinu tu vůbec není řeč, na X nemusí být zaveden

$$f_{ij} := \pi_i \circ f|_{U_j} : U_j \to X_i,$$

která zobecňují dříve definovaná zobrazení g, h, i, j a zapsat matici homomorfismu jako

$$(f)_{NM} \equiv A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & 0 & A_{mn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je matice $(f_{ij})_{N_i,M_j}$. Maticový počet pro matice se čtyřmi bloky se snadno zobecní na matice s mn bloky. Matice A_{ij} mohou samy o sobě mít další blokovou strukturu, která odpovídá rozdělení každého direktního sčítance U_j, X_i na nějaký direktní součet jeho podprostorů.

Blokově diagonální matice

Pokud je f endomorfismus, tedy $U = X$, jsou diagonální bloky A_{ii} čtvercové. Pokud jsou navíc všechny mimodiagonální bloky nulové, mluvíme o matici **blokově diagonální**.

Lemma (Vlastnosti blokově diagonálních matic)**.** *Nechť* $A \in M_{kk}(\mathbb{F})$, $B \in M_{ll}(\mathbb{F})$,

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

je blokově diagonální matice. Pak

1. $\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$
2. $\det X = \det A \det B$
3. $p_X(\lambda) = p_A(\lambda) p_B(\lambda)$
4. $\sigma(X) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$
5. *Pokud X je regulární, pak A i B jsou regulární a Nechť*
$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \in M_{k+l,k+ln}(\mathbb{F})$$
6. *Pokud $A \sim A'$ a $B \sim B'$, pak*
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Důkaz. První tvrzení plyne okamžitě z definice stopy. Pro druhé pišme definici determinantu

$$\det X := \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\pi) x_{1\pi(1)} x_{2\pi(2)} \dots x_{k+l,\pi(k+l)}$$

a označme $M_1 := \{1, \dots, k\}$ a $M_2 := \{k+1, \dots, k+l\}$. Sčítance odpovídající permutacím, které nezobrazují množinu M_1 do sebe, obsahují aspoň jeden prvek x_{ij}, kde $i \in M_1$ a $j \in M_2$, který leží mimo diagonální bloky a tedy je nulový. Každá permutace, která zbyde, je tedy složením π_1 a π_2, kde $\operatorname{Supp} \pi_i \subset M_i$. Pak

π_i můžeme chápat také jako permutaci pouze na množině M_i

$$\det X = \sum_{(\pi_1,\pi_2) \in S_k \times S_l} \operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\pi_2) a_{1,\pi_1(1)} \dots a_{k,\pi_1(k)} b_{1,\pi_2(1)} \dots b_{l,\pi_2(l)},$$

což je vlastně $\det A \det B$. Další tři tvrzení plynou z druhého a z definic. Pro poslední stačí jen ověřit, že pokud $A' = PAP^{-1}$ a $B' = QBQ^{-1}$, pak

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

□

Lemma lze samozřejmě okamžitě zobecnit na matice s libovolným počtem diagonálních bloků.

Diagonalizovatelnost množiny matic

Definice. Řekneme, že množina $\mathcal{A} \subset M_{nn}(\mathbb{C})$ matic je **současně diagonalizovatelná**, pokud existuje regulární matice $Q \in M_{nn}(\mathbb{C})$ taková, že $\forall A \in \mathcal{A}$ je $Q^{-1}AQ$ diagonální matice.

Pokud $A, B \in \mathcal{A}$ a $D_A := Q^{-1}AQ$ a $D_B := Q^{-1}BQ$ jsou diagonální, pak

$$AB = QD_AQ^{-1}QD_BQ^{-1} = QD_AD_BQ^{-1} = QD_BD_AQ^{-1} = BA,$$

tedy AB nutně komutují. Ukážeme, že je to i postačující podmínka:

Věta (O diagonalizaci množiny matic)**.** *Nechť $\mathcal{A} \subset M_{nn}(\mathbb{F})$ je množina diagonalizovatelných matic. Pak $\mathcal{A}$ je současně diagonalizovatelná, právě když každé dvě matice v ní komutují.*

Důkaz. Zbývající implikaci dokážeme indukcí podle n. Matice 1×1 komutují všechny a všechny jsou automaticky diagonální, takže není co dokazovat. Uvažujme $\mathcal{A}$ množinu komutujících diagonalizovatelných matic typu $n \times n$, $n > 1$, keterě nejsou všechny skalárn (tj. nejsou násobkem jednotkové matice). Vyberme $A \in \mathcal{A}$, která není skalární, takže existuje regulární matice R taková, že $D := R^{-1}AR$ je diagonální. Pro každou matici $B \in \mathcal{A}$ platí, že $C := R^{-1}BR$ komutuje s D. Matici D můžeme psát v blokově diagonálním tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{n_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m E_{n_m} \end{pmatrix},$$

kde λ_i jsou navzájem různá. Je snadno vidět, že C musí být také blokově diagonální

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_m \end{pmatrix},$$

kde $C_i \in M_{n_i n_i}(\mathbb{F})$. Podle indukčního předpokladu existují regulární matice $S_i \in M_{n_i n_i}(\mathbb{F})$ takové, že pro všechny takto získané matice C a

$$S := \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & S_m \end{pmatrix}$$

je $S^{-1}CS$ diagonální matice. Pak pro všechna $A \in \mathcal{A}$ a $Q := RS$ je $Q^{-1}AQ$ diagonální matice. $\square$

Větu můžeme formulovat i tak, že pokud množina matic komutuje, pak lze najít společnou bázi z vlastních vektorů. Je-li spektrum prosté, stačí spočítat vlastní vektory jedné matice a ty budou vlastními vektory i pro ostatní.

Cvičení

(1) **(4)** Sestavte charakteristický polynom matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) **(4)** Najděte vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) **(4)** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) **(4)** Najděte matici přechodu od báze vlastních vektorů do kanonické báze pro matici

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(5) **(4)** Ověřte, že báze vlastních vektorů následující matice je ortogonální (vzhledem ke standarnímu skalárnímu součinu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) **(4)** Diagonalizujte matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(7) **(4)** Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte matici U takovou, že $UAU^{-1} = B$.

(8) **(4)** Dokažte, že matice je regulární, právě když všechna její vlastní čísla jsou nenulová.

(9) **(4)** Najděte nějakou matici 2x2, která není horní ani dolní trojúhelníková a má vlastní čísla 5 a 6.

(10) **(4)** Určete koeficient u λ^2 v charakteristickém polynomu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(11) **(4)** Ověřte Cayley-Hamiltonovu větu pro matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

přímým dosazením do charakteristického polynomu.

(12) **(4)** Zapište

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T$$

jako blokovou matici.

(13) **(4)** Zapište

$$\begin{pmatrix} E_n & Q \\ 0 & E_m \end{pmatrix}^{-1}$$

jako blokovou matici.

(14) **(4)** Ověřte, že matice

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

jsou současně diagonalizovatelné a jejich diagonalizaci proveďte.

(15) **(3)** Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení $f : P^2(x,\mathbb{C}) \to P^2(x,\mathbb{C})$ daného vztahem

$$f(a+bx+cx^2)=(5a+6b+2c)-(a+8b)x+(a-2c)x^2$$

(16) **(3)** Diagonalizujte matici

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) **(3)** Diagonalizujte matici

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(18) **(3)** Dokažte, že matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není diagonalizovatelná pro žádné nenulové c.

(19) **(3)** Rekurentní posloupnost $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$, $a_1=a_2=1$ lze formulovat jako zobrazení $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dané vztahem

$$f:\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+1}+a_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizujte matici tohoto zobrazení a vypočtěte její n-tou mocninu. Odvoďte odtud vztah pro n-tý člen posloupnosti.

(20) **(3)** V prostoru reálných polynomů stupně nejvýše 2 najděte bázi, v níž je matice zobrazení T, které reálnému polynomu $f(x)$ přiřazuje polynom $(Tf)(x)=f(0)+f(1)(x+x^2)$, diagonální.

(21) **(3)** Rozmyslete si, která tvrzení lemmatu o vlastnostech blokově diagonálních matic lze zobecnit pro matice typu

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(22) **(2)** Dokažte, že pokud A je matice taková, že každý její řádek má součet c, pak je c kořenem jejího charakteristického polynomu. Dokažte totéž pro sloupce.

(23) **(2)** Spočítejte charakteristický polynom matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

(24) **(2)** Vypočtěte pomocí Hamilton-Cayleovy věty (bez určení vlastních čísel)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{25}$$

(25) **(2)** Spočtěte vlastní čísla a vektory zobrazení $F : M_{22}(\mathbb{C}) \to M_{22}(\mathbb{C})$ definovaného předpisem

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

(26) **(2)** Určete limitu

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{4^m} \begin{pmatrix} 7 & -9 & -15 \\ 3 & 7 & 3 \\ 3 & -9 & -11 \end{pmatrix}^m$$

(27) **(2)** Každý rok se 1/10 z celkových K obyvatel Kocourkova odstěhuje do Tramtárie a 1/5 z celkových T obyvatel Tramtárie se zase odstěhuje do Kocourkova. Kdo se neodstěhuje, zůstává na místě. Určete matici zobrazení, které přiřazuje vektoru (K, T) vektor počtu obyvatel příští rok a poté určete, kolik obyvatel bude kde bydlet až naprší a uschne (tj. za 42 let).

(28) **(2)** Spočítejte pravděpodobnost vítězství ve hře hrané na hracím plánu se čtyřmi políčky 1,2,3,4. Na začátku je figurka na poli 2, dosáhnout pole 4 je prohra, dosáhnout pole 1 je vítězství. V každém tahu si hodíme kostkou a na 1,2 posuneme figurku o jedno pole doleva, na 3,4,5,6 o jedno pole doprava. Použijte při tom vlastní čísla a limitní přechod, případný alternativní výpočet jen jako kontrolu.

(29) **(2)** Označme $O(n) := \{A \in M(n\times n) | A^TA = E\}$ a $SO(n) := O(n) \cap \{A | \det A = 1\}$. Ukažte, že pro libovolná matice $A \in SO(3)$ zachovává nějaký vektor $v \in \mathbb{R}^3$ a v rovině na něj kolmé působí jako rotace o úhel $\frac{1}{2}(\operatorname{Tr} A - 1)$.

(30) **(2)** Na kružnici se pohybují bez tření dvě tělesa, první má hmotnost m a velikost rychlosti u_0, druhé má hmotnost M a velikost rychlosti v_0. Rychlosti nejsou stejné a zároveň stejně orientované, tedy časem dojde ke srážce. Považujme všechny srážky za dokonale pružné a označme u_i, v_i velikosti rychlosti obou těles po i-té srážce. Sestavte soustavu diferenčních rovnic, jíž se tato posloupnost dvojic velikostí rychlostí řídí a vyřešte ji.

(31) **(2)** Dokažte, že reálná matice lichého řádu má alespoň jedno reálné vlastní číslo.

(32) **(1)** Označme koeficienty charakteristického polynomu vyjádřením $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + D_1\lambda^{n-1} + \ldots + D_n$. Dokažte, že $Tr(A^m) = \sum \lambda_i^m$, kde λ_i jsou vlastní čísla A, a pomocí tohoto tvrzení tvrzení a Vietových vztahu pro D_i dokažte rekurentní formuli

$$mD_m + D_{m-1}Tr(A) + D_{m-2}Tr(A^2) + \ldots + Tr(A^m) = 0, 1 \le m \le n$$

Využijte toho k napsání charakteristického polynomu ve stupni 3 a 4 pouze pomocí stop mocnin A.

(33) **(1)** Dokažte, že pro libovolnou matici A a libovolný polynom $p(x)$ platí $\sigma(p(A)) = \sigma(p(A))$ (Věta o obrazu spektra). Dokažte odtud, že $p(A)$ je regulární, právě když žádné vlastní číslo A není kořenem $p(x)$.

(34) **(1)** Nechť $\pi \in S_n$. Označme E_π matici která se dostane z jednotkové matice E_n permutací jejích řádků pomocí permutace π. Dokažte, že pro každou matici $X \in M_{mn}(\mathbb{F})$ existují permutace $\pi \in S_m$, $\rho \in S_n$ takové, že v matici

$$E_\pi X E_\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

je podmatice A regulární a její rovnost je rovna hodnosti X. Takovému zápisu X se říká **blokový zápis s plnou hodností**. Tvrzení říká, že u každé matice lze přeuspořádat řádky a sloupce tak, aby prvních $h(X)$ řádků tvořilo bázi řádkového prostoru a prvních $h(X)$ sloupců bázi sloupcového.

(35) **(1)** Nechť
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
je blokový zápis s plnou hodností. Dokažte, že pak $D = CA^{-1}B$.

(36) **(1)** Pomocí předchozího cvičení (anebo i bez něj) dokažte, že pro matici X typu $m \times n$ hodnosti r existují matice W typu $m \times r$ a Y typu $r \times n$ takové, že $X = WY$. Matice W a Y mají plnou hodnost, proto se tomu říká **faktorizace s plnou hodností**.

(37) **(1)** Pro matici
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$
kde A je regulární, definujme $Z := D - CA^{-1}B$, tzv. **Schurův doplněk** A v X. Je vidět, že pokud jde o blokový zápis s plnou hodností, je $Z = 0$. Dokažte, že $\det X = \det A \det Z$. Nápověda: Rozložte X na součin blokově dolní trojúhelníkové matice a blokově horní trojúhelníkové matice.

(38) **(1)** Nechť
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$
kde A, D a X jsou regulární. Dokažte, že pak je i Z regulární a
$$X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(E + BZ^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BZ^{-1} \\ -Z^{-1}CA^{-1} & Z^{-1} \end{pmatrix}$$