Lineární algebra pro fyziky - ZS 10/11

Sada úkolů 3

1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(1,2),(2,3)\}$, $N = \{(1,1),(1,0)\}$, K je kanonická báze a lineární zobrazení f je definováno hodnotami na bázi M:

$$f((1,2)) = (3,5)$$
$$f((2,3)) = (1,2)$$

   Určete matice homomorfismu $(f)_{NM}$, $(f)_{KM}$ a $(f)_{KK}$ a určete vektor $f((-1,5))$.

2. Určete matici přechodu od báze $M = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}$ k bázi $N = \{x^2+2, x^2-3x+1, x^2+x+3\}$ v prostoru všech reálných polynomů stupně nejvýše 2.
3. Popište jádro a obraz endomorfizmu F množiny M všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$, který je definován vztahem $\forall f \in M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(F(f))(x) = f(x) - f(-x)$.
4. V $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi podprostoru

$$\langle (1,-1,2,4),(1,-2,2,3),(2,-2,5,7)\rangle$$

   obsahující kladný násobek vektoru $(1,0,2,5)$. Najděte ortogonální doplněk tohoto podprostoru.

5. Označme P^n prostor všech reálných polynomů stupně nejvýše n na intervalu $\langle -1,1\rangle$. Dokažte, že zobrazení

$$(\cdot,\cdot) : P^n \times P^n \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \to \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

   je skalární součin na P^n. Ortogonalizací báze $\{1, x, x^2\}$ najděte ortonormální bázi prostoru P^2 s tímto skalárním součinem.

6. Najděte v $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru

$$\langle (2,0,1,0,1),(1,-1,1,0,1),(1,1,0,0,1)\rangle$$

   a najděte v tomto doplňku ortonormální bázi.