Lineární algebra pro fyziky - ZS 10/11

Sada úkolů 2

1. Určete dimenzi podprostorů

$$V_1 = \langle (1,2,1,0,-1),(2,1,0,1,-1),(1,0,0,0,1) \rangle$$

   a

$$V_2 = \langle (1,2,0,1,0),(1,0,1,0,-2),(0,1,-5,5,2) \rangle$$

   v $\mathbb{R}^5$, jejich spojení a jejich průniku. Najděte bázi $V_1 \cap V_2$.

2. Dokažte, že množina $A_n(\mathbb{R})$ všech antisymetrických matic stupně n (tedy těch, pro něž $A = -A^T$) je vektorový podprostor $M_{nn}(\mathbb{R})$, najděte nějakou jeho bázi a určete jeho dimenzi.

3. V závislosti na $a \in \mathbb{R}$ určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Určete také hodnost matice transponované a ověřte, že se rovnají.

4. Dokažte, že čtvercová matice A je singulární, právě když existuje nenulová čtvercová matice B splňující $AB = 0$.

5. Z množiny vektorů $\{(5,7,-1,3), (1,-3,8,2), (9,17,-10,4), (-2,6,-16,-4)\}$ v $\mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejího lineárního obalu. Doplňte tuto bázi na bázi celého $\mathbb{R}^4$.

6. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi prostoru $\{(x_1,\dots,x_n) | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} \leq \mathbb{R}^n$.