Lineární algebra pro fyziky, ZS 13/14

Domácí úkol 6

1. (1b) Najděte nějakou bázi a určete dimenzi prostoru
   (a) $P^n(x, \mathbb{R})$ všech polynomů stupně nejvýše n
   (b) všech polynomů z $P^n(x, \mathbb{R})$, pro které $p(0) = 0$.
   (c) všech polynomů z $P^n(x, \mathbb{R})$, pro které $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = -p(-x)$.
   (d) všech polynomů z $P^n(x, \mathbb{R})$, které jsou násobkem polynomu x^3+x+2.
2. (1b) Označme $U_n(\mathbb{F})$ prostor všech horních trojúhelníkových matic nad $\mathbb{F}$ a $A_n(\mathbb{F})$ prostor všech antisymetrických matic nad $\mathbb{F}$. Dokažte, že $U_n(\mathbb{F}) \oplus A_n(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$.
3. (2b) Dokažte, že je-li $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ lineárně nezávislá množina ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{F}$ a $r_{ij} \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ jsou libovolné skaláry, pak vektory $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ z aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{F}^n$ tvoří lineárně nezávislou množinu $\{s_1, s_2, \dots s_k\} \subset \mathbb{F}^n$ právě když je lineárně nezávislá množina $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$, kde $v_i := \sum_{j=1}^n r_{ij} u_j$.