Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 7 - Bilineární formy

1. Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$, $\alpha_i := (1,2)$ souřadnice kovektoru vzhledem k M^*. Najděte jeho souřadnice vzhledem k $(M')^*$, kde $M' := \{(3,1),(3,2)\}$.
2. Kovektory α, β, γ mají vzhledem k bázím M a M' vyjádření
$$\begin{aligned} \alpha &= e^1 + e^2 + e^3 = e'^1 + e'^2 \\ \beta &= e^1 - e^3 = e'^2 + e'^3 \\ \gamma &= e^1 = e'^1 + e'^3 \end{aligned}$$
Určete matici přechodu od M k M'.
3. Na prostoru $V = M_{22}(\mathbb{R})$ definujme zobrazení $B : V \times V \to \mathbb{R}$ vztahem $B(X,Y) = \mathrm{Tr}(XY)$. Ověřte, že B je bilineární forma a najděte její matici vzhledem k bázi
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
4. Nechť $M = \{(1,3),(1,2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
matice bilineární formy vzhledem k M. Najděte její matici vzhledem k $M' := \{(2,3),(3,5)\}$.
5. Bilineární forma B na $\mathbb{R}^3$ má vůči kanonické bázi matici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Najděte bázi M, vzhledem k níž má B diagonální matici, a určete tuto matici.
6. Bilineární forma B na $\mathbb{R}^3$ má vůči kanonické bázi matici
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Najděte bázi M, vzhledem k níž má B diagonální tvar s celými čísly na diagonále, a určete tuto matici