Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 4 - Jordanův tvar podruhé

1. Spočtěte
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & -6 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{666}$$

2. Najděte Jordanův tvar a Jordanovu bázi pro matici
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 3 \\ -5 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $(\lambda-2)^2(\lambda+1)^2$.

3. Najděte Jordanův tvar matice
$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & 0 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $(\lambda^2-1)^2(1-\lambda)$.

4. Najděte Jordanův tvar matice
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$
Můžete využít faktu, že charakteristický polynom matice je $\lambda^4(1-\lambda)$.

5. Na prostoru $P^2(\mathbb{R})$ najděte Jordanovu bázi endomorfismu F, který polynomu $p(x)$ přiřazuje polynom $p'(x) - x^2p''(x)$.

6. Na prostoru $\langle 1, x, y, x^2, xy, y^2 \rangle$ uvažujme endomorfizmus F definovaný na polynomu $p(x,y)$ předpisem
$$F(p(x,y)) = p(x+1,y)$$
Najděte jeho Jordanovu bázi a Jordanovu matici.

7. Nechť N je nilpotentní matice. Dokažte, že pak $E - N$ je regulární a její inverzní matice je $\sum_{i=0}^{\infty} N^i$ (díky nilpotenci má řada ve skutečnosti jen konečně mnoho nenulových členů). Odvoďte z toho, jak vypadá $J_k(\lambda)^{-1}$.

8. Najděte Jordanův tvar matice $J_k(\lambda)^T$. Dokažte odtud, že pro každou čtvercovou matici A existuje regulární matice P, že $A = PA^TP^{-1}$.