Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 3 - Jordanův tvar

1. Nechť $V = P^{16}(x, \mathbb{C})$, $f \in End(V)$ je definováno jako čtvrtá derivace $f(p(x)) = p^{(4)}(x)$. Najděte Jordanovu bázi a matici zobrazení f vzhledem k ní.
2. Najděte Jordanův tvar matice
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$
3. Dokažte, že pokud A, B jsou dvě komutující nilpotentní matice, pak je nilpotentní i jejich součet a součin.
4. Ověřte, že matice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
je nilpotentní a najděte její Jordanovu bázi a Jordanův tvar.
5. Najděte Jordanovu bázi a Jordanův tvar matice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Nechť $J = J_k(0)$ je Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem 0. Najděte matici J^{k-1} a určete její Jordanův tvar a Jordanovu bázi.
7. Určete
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}^{100}$$
8. Najděte Jordanův tvar matice $n \times n$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
9. Nechť $J = J_k(\lambda)$ je Jordanova buňka stupně k s vlastním číslem λ. Určete J^n pro všechna $n \in \mathbb{N}$.