Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 10 - Tenzory

1. Nechť $u = (1, -1)$, $v \in (2, 3)$. Najděte souřadnice trivektoru $u \otimes u \otimes u + v \otimes v \otimes v$ vzhledem ke kanonické bázi v $\mathbb{R}^2$.
2. Nechť $M = \{(1, 3), (1, 2)\}$ je báze $\mathbb{R}^2$,

$$(((T_1)_{jk}), ((T_1)_{jk})) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

souřadnice tenzoru T vzhledem k M, definované předpisem $(T_i)_{jk} := T^{ij}_k$. Napište, do jakého prostoru tenzorů T patří a najděte jeho souřadnice vzhledem k $M' := \{(2, 3), (3, 5)\}$.

3. Uvažujme $V = \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, $w = (3, 1)$, $T : V^* \times V \times V \to \mathbb{R}$ je tenzor definovaný

$$T(\phi, u, v) = \phi(w)(u, v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem k bázi $\{(1, 0), (1, 1)\}$ a vyjádřete je jako dvojici matic.

4. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $v = (1, -1)$, $T : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované

$$T(\phi, \psi) = \phi(u)\psi(v) - 2\phi(v)\psi(u)$$

Ověřte, že se jedná o tenzor, pojmenujte jej, najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $\{(-2, 1), (1, 1)\}$ a ověřte rovnost pomocí transformačního vztahu.

5. Nechť $a = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$ a T je tenzor na $\mathbb{R}^2$ definovaný pro $\phi, \psi \in (\mathbb{R}^2)^*, u \in \mathbb{R}^2$ vztahem

$$T(\phi, \psi, u) = \phi(a)\psi(u) - \psi(a)\phi(u)$$

   (a) Ukažte, že T je antisymetrický v prvních dvou argumentech.
   (b) Najděte souřadnice T vůči kanonické bázi a zapište je jako dvojici matic.
   (c) Napište transformační vztah pro změnu souřadnic tenzoru T při přechodu do nějaké báze M'.
   (d) Pomocí tohoto transformačního vztahu najděte souřadnice tenzoru T vůči bázi $\{(2, 1), (3, 1)\}$.

6. Nechť $a = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem. Definujme tenzor

$$T(u, v, \psi) = (a, u)\psi(v)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Pomocí zdvihu/spuštění indexu převeďte T na kovariantní tenzor a spočtěte souřadnice jeho úplné antisymetrizace vzhledem ke kanonické bázi.

7. Nechť T je tenzor typu $(2, 2)$ definovaný předpisem

$$T(u, v, \phi, \psi) = \phi(u)\psi(v)$$

Určete souřadnice tenzoru $T(\cdot, \cdot, \varepsilon^1, \cdot)$ vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $\{(1, 1), (1, 0)\}$, přičemž ε^1 je první vektor duální kanonické báze.

8. Nechť $a = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ Definujme tenzor

$$T(u, \phi, \psi) = \phi(u)\psi(a) - 2\phi(a)\psi(u)$$

Najděte jeho souřadnice vzhledem ke kanonické bázi. Najděte souřadnice jeho zúžení v prvních dvou argumentech vzhledem ke kanonické bázi.