Lineární algebra pro fyziky - LS 11/12

Sada 1 - skalární součin

1. Najděte v $M_2(\mathbb{R})$ se standardním skalárním součinem ortogonální doplněk prostoru
$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$
2. Spočtěte ortogonální doplněk nadroviny $\langle (1,0,0,1), (0,1,2,0), (1,2,0,-1) \rangle$ pomocí zobecněného vektorového součinu.
3. Dokažte tvrzení: Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, U, W jeho dva podprostory. Pak
$$U^{\perp} \cap W^{\perp} = (U \vee W)^{\perp}$$
4. Nechť A je reálná $m \times n$ matice, označme $S(A)$ její sloupcový prostor, $R(A)$ její řádkový prostor a $N(A)$ její nulový prostor (množinu řešení homogenní soustavy rovnic s maticí A). Dokažte, že $N(A) \oplus R(A) = \mathbb{R}^n$ a $N(A^T) \oplus S(A) = \mathbb{R}^m$.
5. Spočtěte matici ortogonální projekce $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ na podprostor
$$W := \langle (1,1,1,1), (1,0,0,1) \rangle$$
vzhledem ke kanonické bázi.
6. Rozložte vektor $(1,4,3)$ na součet dvou vektorů, z nichž jeden leží ve směru vektoru $(1,2,1)$ a druhý v jeho ortogonálním doplňku.
7. Najděte ortonormální bázi podprostoru
$$\langle (1,2,2,1), (3,1,4,-3), (-1,3,0,5) \rangle$$
8. Proveďte QR-rozklad matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
9. Najděte ortonormální bázi podprostoru
$$\langle (1,1,1,1), (2,-1,2,1), (1,-4,-3,2) \rangle$$
10. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle , \rangle$, u jednotkový vektor v něm. Ověřte, že zobrazení $R_u : V \to V$ dané předpisem $R_u(x) = x - 2\langle x, u \rangle u$ je zrcadlení podle nadroviny $\{u\}^{\perp}$.
11. Nechť $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Platí
$$A^T Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0$$
Zdůvodněte jednotlivé implikace a vyvoďte, co z toho plyne pro hodnosti matic $A^T A$ a A.