Geometrie, NMAG204 13/14
cvičení 5

Hladká plocha je množina $S \subset \mathbb{R}^3$, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ (homeomorfismus) tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají celou plochu S se nazývá atlas plochy S.

Přechodové zobrazení mezi dvěma mapami $\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}$ je zobrazení $\phi = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ \mathbf{p}$.

- Značení $\mathbf{p}_u = \frac{\partial p}{\partial u}$ a $\mathbf{p}_v = \frac{\partial p}{\partial v}$.

Tečný prostor $T_{s_0}S$ k ploše S v bodě s_0 je množina všech tečných vektorů v bodě $s_0 \in S$. Jestliže $\mathbf{p}$ je mapa na S a $s_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$, pak

$$T_{s_0}S = \langle \mathbf{p}_u(u_0, v_0), \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \rangle.$$

Jednotkový normálový vektor k ploše S s mapou $\mathbf{p}$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

První fundamentální forma plochy S s mapou $\mathbf{p}(u, v)$ je v každém bodě vyjádřena vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Příklady

1. Nalezněte atlas roviny zadané třemi jejími body A, B a C. *(0,5 bodu)*
2. Nalezněte atlas sféry
   (a) pomocí sférických souřadnic, *(0,5 bodu)*
   (b) pomocí stereografické projekce, *(0,5 bodu)*
   (c) **[C]** pomocí kolmé projekce kruhu do polosféry. *(0,5 bodu)*

   Diskutujte minimální počet map v atlase a ověřte hladkost přechodových funkcí.
3. Napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus. *(1 bod)*
4. **[C]** Standardní kužel $K = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = z^2\}$ má vrchol v počátku. Zdůvodněte, proč není standardní kužel plocha ve smyslu naší definice a proč kužel bez vrcholu plochou je, a nalezněte jeho atlas. *(0,5 bodu)*
5. Najděte intervaly pro t a θ a najděte ještě jednu podobnou mapu tak, aby s mapou

   $$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta, \left((-t \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

   tvořila atlas Möbiova pásku. Dokažte, že na něm neexistuje spojité zobrazení, které přiřazuje každému bodu pásku jednotkový normálový vektor. *(1 bod)*
6. Nalezněte mapy regulárních kvadrik, $a, b, c > 0$, o jaké kvadriky se jedná?
   (a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *(0,5 bodu)*
   (b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ *(0,5 bodu)*
   (c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ *(0,5 bodu)*

(d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ *(0,5 bodu)*

7. Nalezněte mapu plochy vzniklé rotací křivky $\mathbf{c}(t) = [f(t), 0, g(t)]$, $t \in I$ kolem osy z, $f(t) \neq 0$ pro $t \in I$. *(0,5 bodu)*

8. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy

$$\mathbf{p}(u, v) = [u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3]$$

v jejím bodě $\mathbf{p}(-1, 1)$. *(0,5 bodu)*

9. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy dané rovnicí $xyz = 6$ v jejím bodě $A = [-2, 1, -3]$. *(0,5 bodu)*

10. Napište rovnici tečné roviny a určete jednotkový normálový vektor plochy

$$\mathbf{p}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 2v]$$

v jejím bodě $\mathbf{p}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. *(0,5 bodu)*

11. Nechť $f(x, y, z) = 0$ je implicitní rovnice určující regulární plochu $\mathbf{p}(u, v)$. Dokažte, že vektor

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

je normálovým vektorem roviny $\mathbf{p}$. *(1 bod)*

12. Určete matice první fundamentální formy

(a) roviny $\mathbf{p}(u, v) = [u, v, 0]$, *(0,5 bodu)*

(b) rotační válcové plochy $\mathbf{p}(u, v) = [R \sin u, R \cos u, v]$, *(0,5 bodu)*

(c) sféry $\mathbf{p}(u, v) = [R \cos v \sin u, R \cos v \cos u, R \sin v]$, *(0,5 bodu)*

(d) helikoidu $\mathbf{p}(u, v) = [v \cos u, v \sin u, ku]$. *(0,5 bodu)*