Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 4

Hlavní kružnice (neboli přímka ve sférické geometrii) je průnik sféry a roviny procházející středem sféry.

Loxodromou - nazveme křivku protínající všechy poledníky pod stejným úhlem.

Úhly při vrcholech sférického trojúhelníku A, B, C označíme postupně α, β, γ a délky stran protilehlých úhlům α, β, γ označíme postupně a, b, c. Pak platí

obsah trojúhelníka	$\|ABC\| = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
cosinová věta	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$
	$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$
sinová věta	$\dfrac{\sin a}{\sin \alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin \beta} = \dfrac{\sin c}{\sin \gamma}$
Pythagorova věta	pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme
	$\cos c = \cos a \cos b$

1. Parametrizujte sféru $S^3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \, , \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   (a) pomocí goniometrických funkcí, jakou má tato parametrizace spojitost se zeměpisnými souřadnicemi?
   (b) pomocí stereografické projekce ze severního pólu,
   (c) pomocí věty o implicitních funkcích. *(1,5 bodu)*

2. (sss) Určete vnitřní úhly sférického trojúhelníku určeného stranami $a = 60°$, $b = 120°$ a $c = 135°$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*

3. (uuu) Určete délky stran sférického trojúhelníku určeného úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 115°10'$ a $\gamma = 75°33'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*

4. (sus) Určete délku strany c a úhly α a β sférického trojúhelníku určeného stranami $a = 55°20'$, $b = 23°10'$ a úhlem $\gamma = 108°05'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*

5. (usu) Určete délky stran a, b a úhel γ sférického trojúhelníku určeného úhly $\alpha = 60°17'$, $\beta = 80°08'$ a stranou $c = 120°27'$. Kolik je obsah takového trojúhelníku? *(0,5 bodu)*

6. Dopočtěte zbývající strany a úhly pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $a = 55°55'$, $b = 124°08'$. *(0,5 bodu)*

7. Rovnostranný sférický trojúhelník ABC má obsah $3\theta - 180°$. Nechť body L, M, N jsou po řadě středy stran BC, AB a AC. Ukažte, že úhel LNM je menší než θ. Kolik je obsah trojúhelníku AMN? *(1 bod)*

8. Vepišme do koule krychli tak, že střed krychle splývá se středem sféry. Zobrazme hrany krychle středovou projekcí se středu sféry na sféru. Vznikne 6 shodných sférických čtyřúhelníků. Každý z nich nazveme *čtvercem*. Zjistěte úhly a obsah těchto čtverců. Proč nelze definovat sférický čtverec jako čtyřúhelník se 4 pravými úhly? *(0,5 bodu)*

9. Parametrizujte loxodromy na sféře. *(1 bod)*

10. Vypočtěte vzdálenost z Prahy ($50°05'$ s.š., $14°25'$ v.d.) do New Yorku ($40°42'$ s.š., $74°0'$ z.d.)

    (a) po loxodromě

    (b) po hlavní kružnici

    a výsledky porovnejte. *(1,5 bodu)*

11. Ukažte, že hlavní kružnice má v každém bodě normálu shodnou s normálou sféry. *(0,5 bodu)*

12. Dokažte, že křivka je sférická, pokud se všechny její normálové roviny protínají v jednom bodě. *(1 bod)*

13. (Eulerova formule) Pro libovolný mnohostěn vepsaný do koule dokažte Eulerovu formuli

    $$s - h + v = 2,$$

    kde s značí počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů daného mnohostěnu. *(1 bod)*

14. Dokažte, že parametrická křivka

    $$\mathbf{c}(t) = \left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos(t), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin(t), e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

    leží na kuželové ploše $x^2 + y^2 = z^2$ a protíná její površky pod úhlem $45°$. *(1 bod)*