Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 3

Zobecněná šroubovice je křivka pro kterou existuje směr, se kterým tečny křivky svírají konstantní úhel.

Pro regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(t_0)$ s nenulovou křivostí

- její *poloměr křivosti* jako $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$,
- její *střed křivosti* jako bod $\mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{n}(t)$,

Pro regulární rovinnou křivku $\mathbf{c}(t)$ definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(t_0)$ s nenulovou křivostí *oskulační kružnici* jako kružnici se středem $\mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{n}(t)$ a poloměrem $\mathbf{R}(t)$.

Evoluta je křivka středů oskulačních kružnic.
Evolventou k regulární křivce $\mathbf{c}(t)$ parametrizované obloukem nazveme křivku parametrizovanou předpisem

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{c}(s) - (s_0 - s)\mathbf{T},$$

kde s_0 je nějaký bod definičního oboru $\mathbf{c}(s)$.
Příklady

1. **[C]** Dokažte, že pokud je $\mathbf{c}(t)$ regulární křivka a $\mathbf{c}(t_0)$ bod s nenulovou křivostí, má ze všech kružnic oskulační kružnice s křivkou $\mathbf{c}(t)$ v bodě $\mathbf{c}(t_0)$ dotyk nejvyššího řádu. *(1 bod)*

2. Ukažte, že $\mathbf{c}(t) = \left[3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right]$, $t \in \mathbb{R}$ (viz příklad 2 z druhého cvičení) je zobecněnou šroubovicí a určete směr, se kterým tečné vektory svírají konstantní úhel. *(0,5 bodu)*

3. Vypočtěte v obecném bodě křivost a torzi křivky

$$\mathbf{c}(t) = \left[3\,t - t^3, 2\,t^3 + 3\,t^2, 2\,t^3 - 3\,t^2\right], \quad t \in (0, 2).$$

   Ukažte, že poměr křivosti a torze je konstantní.

   Ukažte, že $\mathbf{c}(t)$ je zobecněnou šroubovicí a určete směr, se kterým tečné vektory svírají konstantní úhel. *(1,5 bodu)*

4. Dokažte, že křivka $\mathbf{c}(t)$ s nenulovou křivostí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy když je poměr $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$ konstantní. *(1,5 bod)*

5. Ukažte, že evoluta křivky s konstantní křivostí a nenulovou torzí má stejnou konstantní křivost. Jaká je torze evoluty? *(2 body)*

6. Ukažte, že křivka je evolutou své evolventy a naopak. *(1 bod)*

7. Najděte evolutu k elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *(1 bodu)*

8. **Řetězovka** je křivka, která odpovídá hmotnému elastickému lanu o hustotě ρ zavěšeného v bodech $[-b, a], [b, a]$. Parametrizujte ji.

   Nápověda: Předpokládejme, že počátek soustavy souřadnic je nejnižším bodem lana. Nechť $T(x) = (T_1(x), T_2(x))$ je tahová síla působící na bod lana, tj. síla, která je reakcí na gravitační sílu části lana, která leží mezi daným bodem a vzdálenějším koncem lana. Nechť $0 < x_0 < x_1$. Pak máme z rovnosti sil $T_1(x_0) = -T_1(x_1)$. *(1,5 bodu)*

9. Ověřte, že tractrix je evolventou řetězovky. *(1,5 bodu)*

10. Ověřte, že evolventa šroubovice je rovinná křivka. *(1 bod)*

11. Ukažte, že evolventa cykloidy je opět cykloida. *(1 bod)*

12. Uvažujme křivku $\mathbf{c}(t) = [t, t^2, t^3]$ v $\mathbb{R}^3$ pro reálný parametr $t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že pro libovolnou čtveřici po dvou různých bodů ležících na $\mathbf{c}(t)$, neexistuje rovina, která by tyto body obsahovala. *(1,5 bodu)*