Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 2

Pro křivku $\mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem definujeme v každém jejím bodě $\mathbf{c}(s)$

- její *tečný vektor* $\mathbf{t}(s) = \mathbf{c}'(s)$,
- její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s) \rangle$,
- její *křivost* jako $\kappa(s) = |\mathbf{c}''(s)| = |\mathbf{t}'(s)|$.

Body, ve kterých je křivost nulová nazýváme *inflexní*. V každém bodě, který není inflexní, dále pro křivku definujeme

- její *normálový* a *binormálový vektor*
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|} = \frac{\mathbf{t}'}{\kappa}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$
- ortonormální *Frenetův repér* jako uspořádanou trojici $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$,
- její *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$,
- její *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$,
- její *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(s) + \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$
- a její *torzi* τ vztahem $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\, \mathbf{n}(s)$.

V obecné parametrizaci platí vzorce

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}) \cdot \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\,\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

1. Parametrizujte následující křivky obloukem:
   (a) $\mathbf{c}(t) = \left[at, a\sqrt{2}\ln t, at^{-1}\right]$ pro $t \in (0, \infty)$, *(0,5 bodu)*
   (b) **[C]** $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})]$ pro $t \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*

2. Je dána prostorová křivka
$$\mathbf{c}(t) = \left[3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right], \quad t \in \mathbb{R}$$
spočtěte její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$. *(1 bod)*

3. **[C]** Určete Frenetův repér křivky $\mathbf{c}(t) = \left[t, t^2, e^t\right]$, $t \in \mathbb{R}$ v bodě $t = 0$. *(0,5 bodu)*

4. Je dána parametrizovaná křivka
$$\mathbf{c}(t) = \left[\frac{1}{5}\,t^5 + t^2 - 2\,t, -\frac{1}{2}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3 + t^2, \frac{4}{3}\,t^3 - t^2\right], \quad t \in (0, 2).$$
V bodě $t = 1$ nalezněte její křivost, torzi a Frenetův repér. *(1 bod)*

5. **[C]** Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice $\mathbf{c}(t) = [R\cos(t), R\sin(t), at]$, $t \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*

6. Spočtěte rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = \left[\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)\right], \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(1 bod)

7. Určete průsečnici roviny $z = 0$
   (a) s normálovou rovinou
   (b) s oskulační rovinou

   šroubovice $\mathbf{c}(t) = [\cos t, \sin t, t]\,,\ t \in \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{c}(\frac{\pi}{2})$. *(1 bod)*

8. Zjistěte zda křivka $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right],\ t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ leží v rovině, případně v jaké. *(1 bod)*

9. Studujte křivost pro elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, určete její maxima a minima. *(1 bodu)*

10. Odvoďte vzorce pro křivost křivky dané jako graf funkce $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$ v kartézských souřadnicích a pro křivost křivky dané jako graf funkce v polárních souřadnicích $\mathbf{r} = g(\varphi),\ \varphi \in \mathbb{R}$. *(1,5 bodu)*

11. Určete funkci $f(t)$, tak aby měla křivka $\mathbf{c}(t) = [r\cos t, r\sin t, f(t)]\,,\ t \in \mathbb{R}$ nulovou torzi. *(1 bod)*