Diferenciální geometrie křivek a ploch
cvičení 1

1. **[C]** V prostoru mějme body $A = [1, 2, 3]$, $B = [0, -2, -1]$.
   (a) Nalezněte regulární parametrizaci úsečky AB.
   (b) Nalezněte všechny parametrizace $\mathbf{c}(s)$ úsečky AB obloukem tak, aby bod $\mathbf{c}(0)$ ležel ve třetině AB, blíže k bodu A.
   (c) Nalezněte parametrizaci AB tak, aby obsahovala singulární bod. *(1 bod)*

2. **[C]** Uvažujme v rovině kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Postupně ji parametrizujte
   (a) Obloukem pomocí goniometrických funkcí, uvažujte různé výchozí body a orientace.
   (b) Projekcí osy x na kružnici ze středu $[0, -1]$ (stereografická projekce).
   (c) Jako $y = f(x)$, přitom si připomeňte větu o implicitních funkcích.

   Pokuste se najít některé reparametrizace mezi těmito parametrizacemi. Při reparametrizaci mezi a) a b) si připomeňte známou substituci tangens polovičního úhlu. *(1,5 bodu)*

3. **Kubiky.** Máme tři implictině zadané křivky jako množiny těch bodů v rovině, které splňují rovnice
$$y^2 - x^3 = 0 \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$
$$y^2 - x^3 - x^2 = 0 \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$
$$x^3 - y^3 - 3xy = 0 \qquad \textit{(0,5 bodu)}$$
   Najděte nějaké (nejlépe racionální) parametrizace těchto křivek zkuste je načrtnout. (*Návod:* Použijte substituci $y = xt$.)

4. **[C] Cykloida.** Uvažujme kolo o poloměru a, které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$.
   (1 bod)

5. **Hypocykloida.** Uvažujme kružnici o poloměru r, která se valí po vnější straně kružnice o poloměru R. Parametricky popište trajektorii zvoleného bodu na pohyblivé kružnici. Načrtněte tuto křivku pro případ $R = r$, určete parametrický interval na němž se křivka uzavře a spočtěte její délku.
   (1,5 bodu)

6. **Lemniskata.** Uvažujme body $F_1 = [-1, 0], F_2 = [0, 1]$ v $\mathbb{R}^2$. Najděte parametrický popis množiny těch bodů $Z \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnici
$$|F_1 - Z|^2 |F_2 - Z|^2 = 1.$$
   (*Návod:* Použijte substituci $y = xt$.) *(1,5 bodu)*

7. **Kissoida.** Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p. Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S. Pro polopřímku q, která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p, označme jako R bod průniku p a q, jako Q bod průniku k a q. Označme jako P bod na q, který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P, a najděte parametrický popis této množiny. *(1 bod)*

8. **Tractrix** je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[0, 1]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí v podél osy x a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix. *(1,5 bodu)*

9. **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. *(1 bod)*

10. Nalezněte hladkou parametrizaci množiny

$$\{[0, y], y \in \langle 0, 1)\} \cup \{[x, 0], x \in \langle 0, 1)\}$$

a nahlédněte, že taková parametrizace musí mít singulární bod. *(1,5 bodu)*