Geometrie, NMAG204 13/14
cvičení 9

Předpokládejme, že S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannova metrika* na ploše S přiřazuje každému bodu $s \in S$ skalární součin g_s na tečném prostoru T_sS takový, že pro každou mapu $p(u_1, u_2)$ na S jsou funkce

$$g_{ij}(u_1, u_2) := g_{p(u_1,u_2)}\left(p_{u_i}, p_{u_j}\right), \quad i, j \in 1, 2$$

hladké. Symbolicky tuto Riemannovu metriku (ve zvolených souřadnicích) zapisujeme jako výraz

$$ds^2 := g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2.$$

Budeme uvažovat vektorový prostor $M^3 = \{x = [x_0, x_1, x_2] | x_i \in \mathbb{R}\}$ s kvadratickou formou $Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ s Minkowského signaturou $(1, 2)$. Kvadratická forma Q zadává dvoulistý hyperboloid $\{x \in M^3 | Q(x) = -1\}$. Jeho horní list označíme H_2, tedy

$$H_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in M^3 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}.$$

V každém bodě definujeme Riemannovu metriku jako zúžení formy Q na tečný prostor.

Přímky na H_2 definujeme jako průniky rovin procházejících počátkem s H_2. Úsečky definujeme jako souvislé omezené úseky přímek.

Grupa $SO(2, 1)$, kterou definujeme jako podgrupu všech regulárních matic generovanou maticemi tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří grupu přímých izometrií plochy H_2 s Riemannovou metrikou.

Množina $U = \{\zeta = u + iv \in \mathbb{C} || \zeta| < 1\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2)$$

se nazývá Poincarého model hyperbolické roviny.

Zobrazení

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \right)$$

je stereografickou projekcí mezi diskem U a hyperboloidem H_2 a je isometrií vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám.

Množina $H_+ = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ spolu s Riemannovou metrikou

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

se nazývá polorovinový Poincarého model hyperbolické roviny.

Zobrazení, které bodu $z = x + iy \in H_+$ přiřazuje bod $\zeta = u + iv \in U$, pro který platí

$$\zeta = \frac{z - i}{z + i}$$

je isometrií mezi H_+ a U vzhledem k příslušným Riemannovým metrikám a jeho inverze má tvar

$$z = \frac{i(1 + \zeta)}{1 - \zeta}.$$

Zobrazení tvaru

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

tvoří grupu přímých isometrií H_+ (grupa se nazývá Möbiova grupa).

Množinu v rovině nazveme zobecněná kružnice, pokud je to buď kružnice, nebo přímka. Každou zobecněnou kružnici v komplexní rovině lze popsat rovnicí

$$az\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + c = 0,\ |w|^2 > ac,\ a, c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}.$$

Příslušná množina řešení je přímka právě když $a = 0$.

Jsou-li $P = [0, a], Q = [0, b]$, $a < b$ dva body v hyperbolické rovině a $c(t) = (0, t), t \in \langle a, b\rangle$ úsečka, která je spojuje, pak má křivka c nejkratší délku mezi všemi regulárními křivkami v H, které začínají v bodě P a končí v bodě Q.

V libovolném modelu hyperbolické geometrie je plocha hyperbolického trojúhelníka s úhly α, β, γ rovna

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Příklady

1. Dokažte, že Riemannova metrika na H_2 definovaná výše je pozitivně definitní. *(0,5 bodu)*

2. Spočtěte stabilizátor bodu $i \in H_+$ v grupě přímých izometrií H_+. *(0,5 bodu)*

3. Ukažte, že $g(\zeta) = e^{i\theta}\frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta}$ je izometrie Poincarého modelu hyperbolické roviny, pro $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. *(1 bod)*

4. Ukažte pro zobrazení $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \varphi'(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, že $\varphi \circ \varphi'$ má koeficienty, které odpovídají koeficientům
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$
(0,5 bodu)

5. Ukažte, že zobrazení $\varphi_\alpha = z + \alpha$ a $\varphi_\beta = \beta z$, kde $\beta > 0$, jsou izometrie H_+. *(0,5 bodu)*

6. Dokažte, že prvky Möbiovy grupy převádí zobecněné kružnice na zobecněné kružnice. *(1 bod)*

7. Jaký je obsah trojúhelníku ABC, pokud všechny jeho vrcholy leží v nekonečnu, t.j. všechny jeho strany jsou rovnoběžné? Načrtněte takový trojúhelník v Poincarého disku a všechny možnosti takového trojúhelníku v polorovinovém modelu hyperbolické geometrie.
(0,5 bodu)

8. Jaký obsah má čtyřúhelník $ABCD$ v H_+, jehož strany jsou tvořeny přímkami - polokružnicemi se středy v bodech $-2r, -r, r$ a $2r$ s poloměry ve stejném pořadí $4r, r, r$ a $4r$, pro $r \in \mathbb{R}$. *(0,5 bodu)*

9. Jaká je vzdálenost bodů $A = [0, 2]$ a $B = [\sqrt{3}, 1]$ v H_+? *(0,5 bodu)*