Geometrie, NMAG204 13/14
cvičení 7

Hladké zobrazení $f : S_1 \to S_2$, pokud $\mathbf{p}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{p}_1$ je pro každé dvě mapy $\mathbf{p}_1 : \mathcal{O}_1 \to S_1$, $\mathbf{p}_2 : \mathcal{O}_2 \to S_2$ hladé zobrazením otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$.
Označme G matici první fundamentální formy $\mathbf{p}_1$ a $\tilde{G}$ matici první fundamentální formy $f \circ \mathbf{p}_1$

- **isometrické**
  - pokud zachovává délku křivek
  - délka $\mathbf{c}(t)$ je stejná jako délka $f(\mathbf{c}(t))$
  - $G = \tilde{G}$
- **konformní**
  - pokud zachovává úhly mezi křivkami
  - pro každé dvě křivky je úhel mezi $\mathbf{c}(t)$ a $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$ stejný jako úhel mezi $f(\mathbf{c}(t))$ a $f(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}))$
  - $G = \lambda\tilde{G}$, kde λ je kladná funkce na $\mathcal{O}$
- **zachovává velkosti ploch**
  - pokud je velikost každé plochy $\tilde{S} \subset S_1$ stejná jako velikost plochy $f(\tilde{S})$
  - $\det G = \det \tilde{G}$

Isometrické plochy - existuje isometrický difeomorfismus mezi nimi.
Přímková plocha - mějme dánu řídící křivku $\mathbf{c}(u)$ a řídící směr $\mathbf{a}(u)$, které jsou pro každé u lineárně nezávislé, přímková plocha je pak vyjádřena jako $\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{a}(u)$.
Gaussova křivost

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det H}{\det G}$$

Střední křivost

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

Rozvinutelná plocha má nulovou Gaussovu křivost.

Příklady

1. Napište izometrii mezi kuželem $\mathbf{p}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u]$, $u \in \mathbb{R}^+$,$v \in (0, 2\pi)$ a rovinou. *(0,5 bodu)*
2. Uvažujme mapu helikoidu $\mathbf{p}_1(u, v) = [\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u]$ a katenoidu $\mathbf{p}_2(u, v) = [u \cos v, u \sin v, v]$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$. Je zobrazení $\mathbf{p}_1(u, v)$ na $\mathbf{p}_2(\sinh u, v)$ izometrie? *(0,5 bodu)*
3. Ukažte, že stereografická projekce je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*
4. Ukažte, že kruhová inverze je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*
5. Mějme sféru s mapou $\mathbf{p}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a rovninu s mapou $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = [u, h(v), 0]$, kde $h'(v) \neq 0$. Jak je nutné zvolit $h(v)$, aby bylo zobrazení dané rovností parametrů ze sféry do roviny zachovávalo velikost ploch? *(0,5 bodu)*
6. Mějme sféru s mapou $\mathbf{p}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$ a rovinu s mapou $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = [h(v) \cos u, h(v) \sin u, -1]$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak, že $f \cdot f' \neq 0$. Jak je nutné zvolit $h(v)$, aby zobrazení sféry do roviny

(a) bylo konformní? *(0,5 bodu)*

(b) zachovávalo velikost ploch? *(0,5 bodu)*

7. Ukažte, že Mercatorova projekce ze sféry do roviny daná

$$f : \mathbf{p}(u,v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v] \to \left[u, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin v}{1-\sin v}\right)\right] = \tilde{\mathbf{p}}(u,v)$$

je konformní zobrazení. *(0,5 bodu)*

8. Dokažte, že Mercatorova projekce nezachovává velikosti ploch. Pro lepší zapamatování tohoto faktu můžete vyřešit „Mercator puzzle“

`http://gmaps-samples.googlecode.com/svn/trunk/poly/puzzledrag.html` *(0,5 bodu)*

9. **[C]** Ukažte, že hyperbolický paraboloid $z = x^2 - y^2$ je přímkovou plochou generovanou dvěmi různými třídami přímek. Je hyperbolický paraboloid $z = xy$ přímková plocha? *(0,5 bodu)*

10. Najděte parametrizaci plochy tečen dané křivky $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, za jakých podmínek je plocha tečen regulární? Jaká je její první fundamentální forma? *(1 bod)*

11. Najděte plochu tečen a její atlas pro šroubovici $(a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$. Načrtněte ji a nalezněte její 1. fundamentální formu. *(0,5 bodu)*

12. Pro plochu tečen s řídící křivkou $\mathbf{c}(t)$ ukažte, že v každém bodě površky $t =$ konst. má plocha stejnou normálu. *(0,5 bodu)*

13. Jsou plocha tečen šroubovice a rovina izometrické? Pokud ano, najděte hledanou izometrii. *(0,5 bodu)*

14. Přímkovou plochu tvořenou přímkami protínajícími dané dvě křivky $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ a rovnoběnými s danou rovinou ρ nazveme **konoid**. Najděte atlas plochy dané

    (a) osou z, šroubovicí $[\cos t, \sin t, t]$, $t \in (0, 2\pi)$ a rovinou xy, *(0,5 bodu)*

    (b) přímkou $[x, 0, 1]$, $x \in \mathbb{R}$, kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ a rovinou yz. *(0,5 bodu)*

15. Určete první a druhou základní formu plochy nějaké mapy elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Určete Gaussovu a střední křivost v bodě $[a, 0, 0]$. *(1 bod)*

16. Určete Gaussovu a střední křivost pro dvě různé mapy paraboloidu $z = a(x^2+y^2)$ pro $a > 0$:

    - $\mathbf{p}_1(u,v) = [u, v, a(u^2+v^2)]$, $u, v \in \mathbb{R}$ a
    - pro mapu vzniklou rotací křivky $\mathbf{c}(t) = [t, 0, at^2]$, $t \in \mathbb{R}$ okolo osy z.

    Výsledek interpretujte. *(1 bod)*

17. Určete hlavní křivosti na rotační ploše. Jaká je podmínka, aby Gaussova křivost byla konstantní? Vyjmenujte plochy s konstantní Gaussovou křivostí $K = -1, 0, 1$. *(1 bod)*

18. Určete Gaussovu křivost obecné přímkové plochy, ukažte, že nikdy není kladná. *(0,5 bodu)*

19. Vypočtěte Gaussovu křivost pseudosféry s mapou

$$\mathbf{p}(u,v) = [e^{-u}\cos v, e^{-u}\sin v, \int_0^u \sqrt{1-e^{-2t}}dt].$$

(0,5 bodu)

20. Určete funkci $f(t)$ tak, aby byla plocha s mapou $\mathbf{p}(u,t) = [f(t) - 2u, tf(t) - 2tu, u + ut^2]$ rozvinutelnou. *(0,5 bodu)*

21. Je dána plocha S_1 a $S_2 = S_1 + aN$, kde $a \in \mathbb{R}^+$ a N je jednotkový vektor normály plochy S_1. Kdy je zobrazení plochy S_1 na S_2 dané rovností parametrů konformní? *(1 bod)*

22. Ukažte, že přímkovou plochou s nulovou střední křivostí je kromě roviny pouze plocha hlavních normál šroubovice. *(1 bod)*

23. Ukažte, že rotační plochou s nulovou střední křivostí je kromě roviny pouze katenoid (plocha vzniklá rotací řetězovky). *(1 bod)*