

Teorie míry a integrálu 2, zimní semestr 2025-2026
Seznam vět z přednášky

1. KONSTRUKCE LEBESGUEOVY MÍRY

Připomeneme:

- Necht' (X, ϱ) je metrický prostor, pak borelovské množiny $\mathcal{B}(X)$ tvoří nejmenší σ -algebru obsahující otevřené množiny.
- μ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$, je-li to míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
- Necht' $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Množinu

$$W = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n\},$$

a také každou množinu, která vznikne záměnou libovolného " $<$ " za " $\leq$ ", nazveme n -buňka. Objem n -buňky definujeme jako 0, je-li $W = \emptyset$, a jako $\text{vol}(W) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, je-li $W \neq \emptyset$.

Věta 1.1 (Rozšíření elementárního objemu, Věta 1.3 z TMI1). *Existuje právě jedna borelovská míra $\mathcal{L}_n$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro každou n -buňku W platí $\mathcal{L}_n(W) = \text{vol}(W)$.*

Jednoznačnost ve Větě 1.1 plyne z věty o jednoznačnosti míry z TMI1, neboť systém n -buněk je uzavřený vzhledem k průniku, $S_k := (-k, k)^n \nearrow \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{L}_n(S_k) < \infty$, a nejmenší σ -algebra obsahující všechny n -buňky je rovna borelovské σ -algebře $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Nyní vybudujeme teorii potřebnou pro důkaz existence Lebesgueovy míry.

Definice. Necht' X je neprázdná množina. Pak funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ je *vnější míra* na X , pokud

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) jsou-li $A, B \subset X$, $A \subset B$, pak $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie);
- (iii) jsou-li $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (spočetná subaditivita).

Příklady:

- (i) Nulová míra, Diracova míra v bodě, aritmetická míra jsou vnější míry.
- (ii)

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset; \\ 1, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

je vnější míra, ale není to míra na $\mathbb{R}$.

(iii)

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(I_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ otevřený interval} \right\}, \quad A \subset \mathbb{R},$$

je vnější míra na $\mathbb{R}$.

Definice. Řekneme, že množina $A \subset X$ je μ^* -měřitelná, pokud

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Značíme

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \subset X : A \text{ je } \mu^* \text{ - měřitelná} \}.$$

Poznámky:

- Vždy platí $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$, stačí tedy požadovat $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$.
- Je-li μ^* vnější míra na X , $Y \subset X$, pak restrikce $\mu^* \upharpoonright_Y : A \mapsto \mu^*(A \cap Y)$ je rovněž vnější míra na Y a platí $\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^* \upharpoonright_Y}$.

Věta 1.2 (Caratheodoryova). *Necht' X je neprázdná množina a necht' μ^* je vnější míra na X . Pak $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ -algebra, $\mu := \mu^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je míra a prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.*

————— konec přednášky 2.10.2025

Příklad: Uvažujme vnější míru

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset; \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

na množině X . Pak $\mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}$.

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra μ^* na X je *metrická*, pokud pro každé dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $\text{dist}(A, B) > 0$ platí $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Připomeňme, že $\text{dist}(A, B) = \inf\{\varrho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Věta 1.3 (μ^* -měřitelnost borelovských množin). *Nechť μ^* je metrická vnější míra na metrickém prostoru (X, ϱ) . Pak $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*

Definice. Symbolem $\mathcal{O}_n$ budeme značit množinu všech otevřených n -buněk (včetně prázdné množiny).

Definice. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$, pak definujeme

$$\mathcal{L}_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \in \mathcal{O}_n, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Věta 1.4 (o Lebesgueově vnější míře). *$\mathcal{L}_n^*$ je metrická vnější míra na $\mathbb{R}^n$ a pro všechny $I \in \mathcal{O}_n$ platí $\mathcal{L}_n^*(I) = \text{vol}(I)$.*

Poznámka: Vnější míru $\mathcal{L}_n^*$ nazýváme *Lebesgueova vnější míra*.

K důkazu Věty 1.4 budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $I, I_1, \dots, I_k \in \mathcal{O}_n$.

- (i) Je-li $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \dots \cup \bar{I}_k$ a $I_1, \dots, I_k$ jsou po dvou disjunktní, pak $\text{vol}(I) = \text{vol}(I_1) + \dots + \text{vol}(I_k)$.
- (ii) Je-li $I \subset \bar{I}_1 \cup \dots \cup \bar{I}_k$, pak $\text{vol}(I) \leq \text{vol}(I_1) + \dots + \text{vol}(I_k)$.

Definice. Nechť $\delta > 0$ a $E \subset \mathbb{R}^n$. Definujeme

$$\mathcal{L}_n^{\delta*}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \in \mathcal{O}_n, \text{diam}(I_i) < \delta, i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Připomeňme, že $\text{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$.

Tvrzení. Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Pak $\mathcal{L}_n^*(E) = \mathcal{L}_n^{\delta*}(E)$.

————— konec přednášky 9.10.2025

Kombinací Věty 1.2, Věty 1.3 a Věty 1.4 dokážeme, že $\mathcal{L}_n := \mathcal{L}_n^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ je borelovská míra na $\mathbb{R}^n$. Platnost rovnosti $\text{vol}(W) = \mathcal{L}_n(W)$ pro libovolnou (ne nutně otevřenou) n -buňku plyne z toho, že každá n -buňka je průnikem klesající posloupnosti otevřených n -buněk. Odtud plyne existence ve Větě 1.1.

Připomeneme: Pro systém $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ všech borelovských množin v $\mathbb{R}^n$ budeme někdy používat též alternativní značení $\mathcal{B}^n$. Dále značíme $\mathcal{B}_0^n$ systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$.

Věta 1.5 (regularita Lebesgueovy míry). *Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) $E \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}_n^*}$;
- (ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existují $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená takové, že $F \subset E \subset G$ a $\mathcal{L}_n(G \setminus F) < \varepsilon$;
- (iii) existují množiny $A, B \in \mathcal{B}^n$ takové, že $A \subset E \subset B$ a $\mathcal{L}_n(B \setminus A) = 0$;
- (iv) $E \in \mathcal{B}_0^n$.

Věta 1.6 (Luzinova). *Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená taková, že $\mathcal{L}_n(G) < \varepsilon$ a restrikce $f|_G$ je spojitá.*

Poznámka: Původní funkce f nemusí být spojitá v žádném bodě (příkladem je Dirichletova funkce $f = \chi_{\mathbb{Q}}$).

_____ konec přednášky 16.10.2025

Poznámka: Neplatí, že restrikce f na doplněk nějaké množiny míry 0 musí být spojitá. Nechť C je diskontinuum kladné míry, tj. $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, kde $C_0 = [0, 1]$ a C_{n+1} (pro $n \geq 0$) získáme tak, že z každé komponenty množiny C_n vyjmeme centrováný otevřený interval délky a_{n+1} , přičemž celková délka vyjmutých intervalů je $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_n < 1$. Zvolme $f = \chi_C$. Lze ukázat, že je-li $N \subset [0, 1]$ množina míry 0, pak funkce $f|_{N^c}$ je nespojitá v každém bodě $x \in C \setminus N$ (takový bod x existuje, neboť množina $C \setminus N$ má kladnou míru).

2. VĚTA O ROZŠÍŘENÍ MÍRY

Definice. Nechť X je množina, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je *algebra*, pokud

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Poznámka: Každá algebra je uzavřená též na konečné průniky.

Příklad: $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ je konečná nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ je konečná}\}$ je algebra, ale není to σ -algebra.

Definice. Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je algebra. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ je *pramíra*, pokud

- (i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$;
- (ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Poznámka: Nechť $\tilde{\mu}$ je pramíra, pak $\tilde{\mu}$ je monotónní, tj. jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, pak $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$.

Věta 2.1 (Hahnova-Kolmogorovova o rozšíření míry). *Nechť $\tilde{\mu}$ je pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X . Pak existuje míra μ na $\sigma(\mathcal{A})$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ -konečná, pak je μ jednoznačně určena.*

Poznámka: Řekneme, že $\tilde{\mu}$ je σ -konečná, pokud existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $\mu(A_n) < \infty$ a $A_n \nearrow X$.

_____ konec přednášky 23.10.2025

Příklady:

(i) Nechť $\mathcal{A}_0$ značí systém podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a, b]$, (a, ∞) , kde $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Definujeme množinovou funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}_0$ jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů. Lze ukázat, že $\mathcal{A}_0$ je algebra, $\tilde{\mu}$ je pramíra na $\mathcal{A}_0$ a jejím rozšířením na $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Lebesgueova míra.

(ii) Pokud pramíra není σ -konečná, pak nemusí mít jednoznačné rozšíření na σ -algebru. Nechť $\mathcal{A}_0$ je jako výše. Pro $A \in \mathcal{A}_0$ definujeme

$$(2.1) \quad \tilde{\mu}(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset; \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Pak $\tilde{\mu}$ je pramíra na $\mathcal{A}_0$. Jedno její možné rozšíření na $\sigma(\mathcal{A}_0)$ je dáno vztahem (2.1), jiným rozšířením je například aritmetická míra nebo její kladný násobek.

Tvrzení. Nechť $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ je konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ (tj. jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní, pak $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$). Nechť dále platí $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ -aditivní (tj. platí podmínka (ii) z definice pramíry) právě tehdy, když

$$(2.2) \quad A_i \in \mathcal{A} \text{ pro } i \in \mathbb{N}, \quad A_i \searrow \emptyset \Rightarrow \tilde{\mu}(A_i) \rightarrow 0.$$

Poznámka: Vlastnosti (2.2) se říká *spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině*.

Existence nekonečného součinu měr

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak μ je *borelovská míra* na X , je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

Naším cílem nyní bude s pomocí Věty 2.1 dokázat existenci nekonečného (spočetného) součinu borelovských pravděpodobnostních měr. Tento výsledek dokážeme za předpokladu, že metrický prostor X je úplný a separabilní.

Příklad: Nechť $X = \{0, 1\}$. Pro $A \subset X$ položíme $\mu(A) = \frac{\text{card } A}{2}$. Míra μ vyjadřuje pravděpodobnost, že výsledek hodu mincí (buď 0 nebo 1) patří do množiny A . Pro $n \in \mathbb{N}$ nyní položíme $X_n = \{0, 1\}^n$ a $\mu_n(A) = \frac{\text{card } A}{2^n}$, $A \subset X$. Pak μ_n odpovídá součinnové míře $\mu \times \cdots \times \mu$ a vyjadřuje rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost n nezávislých opakování hodu mincí. V dalším textu vybudujeme teorii, která nám (mimo jiné) umožní popsat rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nekonečně mnoha nezávislých opakování hodu mincí.

Věta 2.2 (regularita borelovských měr). *Nechť (X, ϱ) je úplný separabilní metrický prostor a μ je konečná borelovská míra na X . Pak pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ platí*

$$(2.3) \quad \mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \supset B \text{ otevřená}\}$$

$$(2.4) \quad = \sup\{\mu(K) : K \subset B \text{ kompaktní}\}.$$

Poznámky:

- Vlastnost (2.3) nazýváme *vnější regularitou* míry μ . Tato vlastnost platí i bez předpokladu úplnosti a separability X a je ekvivalentní s vlastností

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B \text{ uzavřená}\}, \quad B \in \mathcal{B}(X).$$

- Míra splňující (2.3) a (2.4) se též nazývá *Radonova*, nicméně pojem Radonovy míry se obvykle zavádí obecněji (bez předpokladu konečnosti míry).

_____ konec přednášky 30.10.2025

Nechť (E_i, ϱ_i) , $i \in \mathbb{N}$, jsou úplné separabilní metrické prostory. Předpokládejme, že všechny metriky jsou shora omezeny 1 (jinak nahradíme ϱ_i ekvivalentní metrikou $\min\{1, \varrho_i\}$). Uvažujme nekonečný kartézský součin $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ a zobrazení

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varrho_i(x(i), y(i))}{2^i}, \quad x, y \in E,$$

přičemž používáme značení $x = (x(1), x(2), \dots)$ a $y = (y(1), y(2), \dots)$. Pak (E, ϱ) je metrický prostor.

Označme nyní $\mathcal{I} = \{I \subset \mathbb{N}, I \neq \emptyset \text{ a } I \text{ je konečná}\}$. Pro $I \in \mathcal{I}$ uvažujme metrický prostor $E_I = \prod_{i \in I} E_i$ s metrikou

$$\varrho_I(x, y) = \sum_{i \in I} \frac{\varrho_i(x(i), y(i))}{2^i}, \quad x, y \in E_I.$$

Nechť dále $\pi_I : E \rightarrow E_I$ značí projekci, která z posloupnosti $x = (x(1), x(2), \dots) \in E$ zachová pouze souřadnice $i \in I$. Jsou-li $I, J \in \mathcal{I}$, $I \subset J$, pak π_I^J značí odpovídající projekci z E_J do E_I .

Příklad: Necht' $I = \{2, 4, 6\}$, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pak

$$\begin{aligned}\pi_I(x(1), x(2), x(3), \dots) &= (x(2), x(4), x(6)), \\ \pi_I^J(x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6)) &= (x(2), x(4), x(6)).\end{aligned}$$

Lemma 2.3. (i) Necht' $x_n, x \in E$. Pak

$$x_n \rightarrow x \text{ v } E \Leftrightarrow x_n(i) \rightarrow x(i) \text{ v } E_i \text{ pro všechna } i \in \mathbb{N}.$$

Dále je-li $I \in \mathcal{I}$ a $y_n, y \in E_I$, pak

$$y_n \rightarrow y \text{ v } E_I \Leftrightarrow y_n(i) \rightarrow y(i) \text{ v } E_i \text{ pro všechna } i \in I.$$

- (ii) Necht' $I \in \mathcal{I}$. Pak (E_I, ϱ_I) je úplný a separabilní metrický prostor.
- (iii) Necht' $I, J \in \mathcal{I}$, $I \subset J$. Pak projekce π_I, π_I^J jsou spojité.
- (iv) Necht' $I \in \mathcal{I}$, pak $\mathcal{B}(E_I) = \times_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$, kde $\times_{i \in I} \mathcal{B}(E_i)$ značí součinnou σ -algebru.

Věta 2.4 (existence nekonečného součinu měr). Necht' $E_i, i \in \mathbb{N}$, jsou úplné separabilní metrické prostory a $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$. Necht' na každém E_i je dána borelovská pravděpodobnostní míra μ_i . Pak existuje právě jedna borelovská pravděpodobnostní míra μ na E taková, že

$$\mu(\pi_I^{-1}(B)) = \mu_I(B), \quad B \in \mathcal{B}(E_I), \quad I \in \mathcal{I},$$

kde $\mu_I = \times_{i \in I} \mu_i$ značí součinnou míru na E_I .

Poznámka: Míru μ z předchozí věty budeme značit $\mu = \times_{i=1}^{\infty} \mu_i$. Větu lze interpretovat jako větu o existenci rozdělení posloupnosti nezávislých náhodných veličin.

Příklad: Necht' $E_i = \{0, 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, a necht' míra μ_i je dána vztahem $\mu_i(A) = \frac{\text{card } A}{2}$ pro $A \subset \{0, 1\}$. Pak $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je prostor nekonečných posloupností 0 a 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Je-li $B \subset E_{I_n} = \{0, 1\}^n$, pak míra μ z Věty 2.4 splňuje

$$\mu(\Pi_{I_n}^{-1}(B)) = \frac{\text{card } B}{2^n}.$$

Tato míra má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování hodu mincí.

_____ konec přednášky 6.11.2025