**Proseminář z Matematické analýzy, LS 2024 – 2025**
**Teoretické příklady**

**TP1.** (na 28. února) Nechť $P$ je polynom stupně $n \geq 2$, který má pouze reálné kořeny. Dokažte, že pak všechny kořeny polynomu $P'$ jsou též reálné.

**TP2.** (na 28. února) Nechť $f$ je spojitá funkce na $[0,1]$, která má ve všech bodech intervalu $(0,1)$ vlastní derivaci. Předpokládejme, že $f(0) = f(1) = 0$ a existuje $x_0 \in (0,1)$ takové, že $f(x_0) = 1$. Dokažte, že pak $|f'(c)| > 2$ pro nějaké $c \in (0,1)$.

**TP3.** (na 7. března) Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}.$$

**TP4.** (na 14. března) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

**TP5.** (na 14. března) Rozhodněte, zda existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že obě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$$

konvergují.

**TP6.** (na 14. března) Rozhodněte, zda existují nerostoucí posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergují, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$$

konverguje.

**TP7.** (na 4. dubna) Nechť $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte bijekci $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ diverguje.

**TP8.** (na 4. dubna) Vyšetřete konvergenci řady

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

vytvořené postupným střídáním dvou kladných a jednoho záporného členu řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

**TP9.** (na 4. dubna) Nechť $x \in (-1, 1)$. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

*Hint:* Interpretujte řadu výše jako Cauchyův součin řad.

**TP10.** (na 28. března) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou divergentní řady reálných čísel. Musí být jejich Cauchyův součin též divergentní řada?

**TP11.** (na 25. dubna) Nechť $f$ je spojitá kladná funkce na $[0, 1]$. Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}\, dx.$$

**TP12.** (na 4. dubna) Nechť $f$ je spojitá sudá funkce na $[-1, 1]$. Dokažte, že

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

**TP13.** (na 25. dubna) Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\binom{n}{n}.$$

*Hint:* K výpočtu použijte integrál $\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx$.

**TP14.** (na 9. května) Nechť $c \in [-1, 1]$ a nechť je funkce $f$ dána vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Pro které hodnoty $c$ má funkce $f$ primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$?

**TP15.** (na 9. května) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f$ je riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Dokažte, že pak existuje $\theta \in [a, b]$ takové, že

$$\int_a^{\theta} f(x)\, dx = \int_{\theta}^{b} f(x)\, dx.$$

**TP16.** (na 2. května) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť $f$ je spojitá funkce na $[a, b]$. Předpokládejme, že

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = 0$$

pro všechny funkce $g$ spojité na $[a, b]$. Dokažte, že potom $f(x) = 0$ pro $x \in [a, b]$.

**TP17.** (na 2. května) Nechť $f$ je spojitá funkce na intervalu $[0,1]$ s hodnotami v intervalu $[-1/2,2]$ splňující $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Dokažte, že $\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq 1$.

**TP18.** (na 16. května) Nechť $f$ je spojitá funkce na intervalu $[0,1]$, která má vlastní derivaci na $(0,1)$ a splňuje $f(0)=0$ a $0 < f'(x) \leq 1$ pro $x \in (0,1)$. Dokažte, že

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3\,dx.$$

*Hint:* Derivujte funkci $F(t) = (\int_0^t f(x)\,dx)^2 - \int_0^t (f(x))^3\,dx$.

**TP19.** (na 9. května) Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\rho(x,y) = \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+\sqrt{|x-y|}}.$$

Rozhodněte, zda je $\rho$ metrika.

**TP20.** (na 9. května) Dokažte, že otevřenou kouli v $\mathbb{R}^2$ se středem v počátku a poloměrem 1 nelze vyjádřit jako spočetné sjednocení po dvou disjunktních otevřených obdélníků. Otevřeným obdélníkem rozumíme množinu tvaru $(a,b) \times (c,d)$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $c < d$.

**TP21.** (na 16. května) Nechť $(X,\rho)$ je metrický prostor a nechť $A$ je podmnožina $X$ typu $F_\sigma$, tj. $A$ je spočetným sjednocením uzavřených množin. Musí pak nutně existovat funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že $A$ je množinou bodů nespojitosti funkce $f$?

**TP22.** (na 16. května) Najděte všechny podmnožiny $\mathbb{R}$, které jsou zároveň otevřené i uzavřené.

**TP23.** (na 23. května) Nechť $(X,\rho)$ je metrický prostor a nechť $A$ je neprázdná podmnožina $X$. Nechť funkce $f : X \to [0,\infty)$ je definovaná vztahem

$$f(x) = \operatorname{dist}(x,A), \quad x \in X.$$

Dokažte, že $f$ je stejnoměrně spojitá na $X$.

**TP24.** (na 23. května) Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\rho_1(x,y) = |x-y|$ a $\rho_2(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Rozhodněte, zda některý z prostorů $(\mathbb{R},\rho_1)$ a $(\mathbb{R},\rho_2)$ má více otevřených množin.