

Strečink III

Nechť $\mathcal{G}$ je kategorie s jediným objektem $*$ a dvěma neidentickými šipkami g a $g^2 = g \circ g$, přičemž platí $g^3 = \text{id}_*$.

$$g \hookrightarrow * \hookleftarrow g^2$$

Úloha 1. Popište, co jsou funktory $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ a přirozené transformace mezi takovými funktory.

Řešení. Každý funktor $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ je jednoznačně popsán objektem (množinou) $F(*)$ a (množinovým) zobrazením

$$F(g): F(*) \rightarrow F(*);$$

toto zobrazení musí splňovat

$$F(g)^3 = F(g^3) = F(\text{id}_*) = \text{id}_{F(*)}$$

a může to být vskutku *libovolné* zobrazení $F(*) \rightarrow F(*)$, které splňuje tuto identitu (tedy např. $\text{id}_{F(*)}$). Samozřejmě platí $F(g^2) = F(g)^2$, proto je tato šipka v $\mathbf{Set}$ již určena volbou $F(g)$. Dva konkrétní příklady F máme v další úloze, jiný je například $F(*) = \{\star, \odot, \ominus\}$, $F(g)(\star) = \odot$, $F(g)(\odot) = \ominus$, $F(g)(\ominus) = \star$ (ale uvědomte si, že zrovna toto je přirozeně ekvivalentní tomu reprezentovatelnému funktoru; stačí místo $\star, \odot, \ominus$ psát id_*, g, g^2).

Přirozená transformace η mezi dvěma takovými funktory F, G má jedinou komponentu, η_* . Přirozenost znamená komutování následujících tří diagramů:

$$\begin{array}{ccccc} F(*) & \xrightarrow{F(\text{id}_*)=\text{id}_{F(*)}} & F(*) & F(*) & \xrightarrow{F(g)} & F(*) & F(*) & \xrightarrow{F(g^2)} & F(*) \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* & \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* & \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* \\ G(*) & \xrightarrow{G(\text{id}_*)=\text{id}_{G(*)}} & G(*) & G(*) & \xrightarrow{G(g)} & G(*) & G(*) & \xrightarrow{G(g^2)} & G(*) \end{array}$$

První diagram komutuje „vždycky“ a z komutování toho druhého plyne i to třetí:

$$\eta_* \circ F(g^2) = \eta_* \circ F(g) \circ F(g) = G(g) \circ \eta_* \circ F(g) = G(g) \circ G(g) \circ \eta_* = G(g^2) \circ \eta_*.$$

Chápeme-li $\mathcal{G}$ jako grupu G (cyklickou řádu 3), pak funktor $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ je konkrétní akce G na množině $F(*)$ – všimněte si, že $F(\text{id}_*)$, $F(g)$, $F(g^2)$ jsou automorfismy $F(*)$, jinak řečeno, funktor nám zadává grupový homomorfismus $G \rightarrow \text{Aut}(F(*)) = S(F(*))$ (automorfismy množin jsou prostě jejich permutace). Přirozená transformace $\eta: F \rightarrow G$ pak je „homomorfismus akcí“: zobrazení množin, které komutuje s / zachovává akci G (v grupově-akčním značení: $\eta_*(g(x)) = g(\eta_*(x))$ pro všechna $x \in F(*)$). $\square$

Úloha 2. Funktor $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ dělá následující: $F(*) = \mathbb{C}$, $F(g)(z) = e^{2\pi i/3}z$ pro $z \in \mathbb{C}$. Popište všechny přirozené transformace z $\mathcal{G}(*, -)$ do F .

Řešení. Podle Yonedova lemmatu je $\text{Nat}(\mathcal{G}(*, -), F) \cong F(*)$. V tomto případě tedy je $F(*) = \mathbb{C}$ a všechny přirozené transformace jsou tvaru η^z , kde $z \in \mathbb{C}$ a je

$$\begin{aligned} \eta_*^z(\text{id}_*) &= z, \\ \eta_*^z(g) &= F(g)(z) = e^{2\pi i/3}z, \\ \eta_*^z(g^2) &= F(g^2)(z) = e^{4\pi i/3}z. \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka (Akce grupy, chápeme-li je jako algebraické struktury). Máme-li grupu G , pak její akci na nějaké množině X lze chápat jako algebraickou strukturu

$$(X, g_1, g_2, \dots),$$

kde $g_1, g_2, \dots$ jsou všechny prvky G (může jich být libovolně mnoho), zde chápané jako unární operace. Přesnější zápis by tedy spíše byl nějak jako

$$(X, g \mid g \in G)$$

nebo tak nějak. Tato struktura splňuje axiomy tvaru $1(x) = x$ a $(gh)(x) = g(h(x))$ pro všechna $x \in X$ a $g, h \in G$; zde 1 je unární operace odpovídající jednotkovému prvku grupy a gh je unární operace odpovídající prvku grupy, který dostaneme grupovým vynásobením g a h v G .

Homomorfismus akcí (jedné pevně!) grupy pak je zobrazení množin, které „zachovává všechny operace“. Tedy máme-li akci G na množinách X, Y , pak jde o funkci $f: X \rightarrow Y$, která splňuje

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

pro všechny unární operace $g \in G$ a všechna $x \in X$. Je přímočaré ověřit, že akce (jedné konkrétní) grupy tvoří spolu s výše definovanými homomorfismy kategorií, kteroužto lze ekvivalentně realizovat jako kategorii funktorů $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Set}$ (kde $\mathcal{G}$ se z G sestojí jako výše) a přirozených transformací mezi nimi.