

5 Mocninné řady

1. Vytvořte okruh formálních mocninných řad nad racionálními čísly; můžete použít buď `PowerSeriesRing`, nebo `QQ[[x]]`. Vezměte si náhodný prvek, vypište seznam jeho koeficientů, najděte k němu inverzní prvek, vypište ho s přesností na prvních n členů.

Mohou se hodit (v celém cvičení) tyto metody: `řada.O(n)`, `řada.polynomial()`, `řada.coefficients()`...

2. Vytvořte mocninou řadu, která je Taylorovým rozvojem (okolo 0) funkce e^x . Jaký je Taylorův rozvoj funkcí $\frac{1}{1-x}$ a $\frac{1}{1-x^2}$?
3. Implementujte algoritmus pro rychlý výpočet prvních n členů inverzní mocninné řady; předpokládejte na vstupu polynom a jako výstup rovněž vracejte polynom (to se bude hodit v následující úloze). Na řadě e^x ověřte, že dává správné výsledky.
4. Implementujte dělení polynomů se zbytkem pomocí inverzní mocninné řady.
5. **Teoretická úloha:** Necht k je těleso. Dokažte, že okruh formálních mocninných řad nad k (tj. $k[[x]]$) je obor hlavních ideálů a všechny jeho ideály jsou uspořádány inkluzí (tvoří řetězec).
6. **Teoretická úloha:** Rozhodněte, pro které $f \in \mathbb{R}[[x]]$ existuje druhá odmocnina, tj. $g \in \mathbb{R}[[x]]$ splňující $g^2 = f$. Jaká bude situace pro obecné těleso?
7. **Teoretická úloha:** Uvažme následující algoritmus (Algoritmus 18 ze skript), který počítá aproximaci zlomku $1/a$ pro $a \in \mathbb{N}$:

Data: $a, k \in \mathbb{N}$

Result: aproximace $1/a$

begin

 zvol x_0 nějaký kladný dolní odhad $1/a$;

for $i = 1, \dots, k$ **do**

$x_i := x_{i-1}(2 - ax_{i-1})$;

end

return x_k

end

Rozmyslete si, že časová složitost vzhledem k $n = \ell(a)$ (počet cifer) a k je $\mathcal{O}(n2^k + 4^k)$. Uvažujte školní násobení.