Třetí cvičení

Výsledky úloh 5, 6, 7 jsou na konci druhé strany.

Fakta (z minula a přednášky). (a) Minimální polynom je vždy ireducibilní.

(b) Nalezneme-li (monický) ireducibilní polynom, jehož kořenem je zadaný prvek, už to je hledaný minimální polynom. (Toto není z přednášky!)

(c) Minimální polynom dělí každý polynom, který má příslušný prvek za kořen.

(d) $[\Bbbk(a) : \Bbbk]$ se rovná stupni $m_{a,\Bbbk}$.

(e) Jsou-li $\Bbbk \leq \mathbb{l} \leq \mathbb{m}$ tělesa, pak $[\mathbb{m} : \Bbbk] = [\mathbb{m} : \mathbb{l}] \cdot [\mathbb{l} : \Bbbk]$.

Úloha 1. Nechť $a \in \mathbb{K}$ je algebraický nad $\Bbbk$ (kde $\Bbbk \leq \mathbb{K}$) a nechť $b \in \mathbb{K}$ splňuje $m_{a,\Bbbk}(b) = 0$. Rozmyslete si, že pak $m_{a,\Bbbk} = m_{b,\Bbbk}$. (Nápověda: Použijte Fakta (a) a (b).)

Úloha 2. Nechť $\Bbbk \leq \mathbb{K}$ jsou tělesa taková, že $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ je prvočíslo. Dokažte, že pak $\mathbb{K} = \Bbbk(a)$ pro *libovolný* prvek $a \in \mathbb{K} \setminus \Bbbk$. (Nápověda: Použijte Fakt (e) na iterované rozšíření $\mathbb{K} \geq \Bbbk(a) \geq \Bbbk$.)

Úloha 3. Nechť $\Bbbk$ je těleso a a algebraický prvek nad $\Bbbk$ takový, že $[\Bbbk(a) : \Bbbk]$ je lichý. Dokažte, že $\Bbbk(a) = \Bbbk(a^2)$. (Nápověda: Kdyby bylo $\Bbbk(a^2) \lneq \Bbbk(a)$, jaký by byl minimální polynom a nad $\Bbbk(a^2)$? Fakta (d) + (e).)

⋆ **Úloha 4.** Nechť a, b jsou algebraické prvky nad $\Bbbk$ takové, že jejich minimální polynomy $m_{a,\Bbbk}$, $m_{b,\Bbbk}$ mají nesoudělné stupně. Dokažte, že pak $m_{a,\Bbbk} = m_{a,\Bbbk(b)}$ a $m_{b,\Bbbk} = m_{b,\Bbbk(a)}$. (Nápověda: Uvažte iterovaná rozšíření $\Bbbk \leq \Bbbk(a) \leq \Bbbk(a,b)$ a $\Bbbk \leq \Bbbk(b) \leq \Bbbk(a,b)$; užitím Fakt (d) a (e) a nesoudělnosti nahlédněte, že $[\Bbbk(a,b) : \Bbbk]$ musí být součin $\deg m_{a,\Bbbk}$ a $\deg m_{b,\Bbbk}$, takže $[\Bbbk(a) : \Bbbk] = [\Bbbk(a,b) : \Bbbk(b)] = \deg m_{a,\Bbbk(b)}$.)

Úloha 5 (copy-paste z minula, pokud si to chcete dopočítat). Nalezněte minimální polynomy $m_{x,\Bbbk}$ následujících prvků $x \in \mathbb{K}$ nad $\Bbbk$, nově také určete $[\Bbbk(x) : \Bbbk]$ a nalezněte nějakou bázi $\Bbbk(x)$ nad $\Bbbk$.

(a) $x = -1 + i$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$

(b) $x = \sqrt{2}i$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(i)$,

(c) $x = \sqrt[4]{2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

(d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}$,

(e) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$,

⋆ (f) $x = \sqrt{2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Bbbk = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,

⋆ (g) $x = t^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2(t)$, $\Bbbk = \mathbb{Z}_2(t + t^2)$ (podtěleso $\mathbb{Z}_2(t)$),

Úloha 6. Víte-li, že $m_{\sqrt{2}+\sqrt{3},\mathbb{Q}} = x^4 - 10x^2 + 1$, nalezněte $m_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1,\mathbb{Q}}$ (a rozmyslete si, že je to skutečně on)!

⋆ **Úloha 7.** Víte-li, že $m_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = x^3 - 2$ a $m_{i,\mathbb{Q}} = x^2 + 1$, nalezněte (ideálně úvahami o symetrických polynomech) absolutní člen a koeficient u x^5 polynomu $m_{\sqrt[3]{2}+i,\mathbb{Q}}$.

Úloha 8. Dokažte, že pokud jsou $p, q \in \mathbb{N}$ různá prvočísla, pak $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}] = 4$.

Výsledky 5. **(a)** $x^2 + 2x + 2$; **(b)** $x^2 + 2$; **(c)** $x^2 - \sqrt{2}$; **(d)** $x^4 - 10x^2 + 1$; **(e)** $x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$; **(f)** $x - \sqrt{2}$ (protože $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\big((\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{2} + \sqrt{3})\big)$); **(g)** $x^2 + (1 + (t + t^2))x + (t + t^2)^3$.

Výsledky 6. $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$

Výsledky 7. Abs. člen 5, koef. u x^5 0.