MÉNĚ ZNÁMÁ KRITÉRIA DĚLITELNOSTI

ANTONÍN SLAVÍK

Ze střední školy jsou dobře známa kritéria pro dělitelnost přirozených (resp. celých) čísel čísly 2, 3, 4, 5, 8 a 9 atd. Studenty může zajímat, zda existují též kritéria pro dělitelnost 7, 11 a dalšími čísly. Ve škole se obvykle dozvědí, že tato kritéria jsou složitá, a proto např. dělitelnost 7 zjišťujeme dělením. Zalistujeme-li např. v pěkné popularizační knize [Op], objevíme na s. 33 následující tvrzení: *Číslo je dělitelné sedmi, je-li dělitelný sedmi součet vypočtený tak, že první, druhou, třetí, ..., n-tou číslici odzadu (zprava doleva) znásobíme postupně čísly periodicky se opakující posloupnosti* 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ... *a takto vypočtené součiny sečteme.* Uvedené kritérium skutečně vypadá komplikovaně a na první pohled nemusí být jasné, odkud se vzalo (v knize chybí jakékoliv vysvětlení). V dalším textu ukážeme, že se jedná o speciální případ poměrně jednoduché a obecné Pascalovy metody, která umožňuje odvodit podobné kritérium pro dělitelnost libovolným přirozeným číslem. Uvidíme, že Pascalovou metodou lze ověřit nejen dělitelnost, ale též najít zbytek při dělení jednoho čísla druhým. V další části textu se podíváme na méně známou tzv. Zbikowského metodu, která je elementárnější než metoda Pascalova a její použití obvykle vede k jednodušším kritériím dělitelnosti, neumožňuje však vypočítat zbytek při dělení.

Studenti mohou namítnout, že znalost kritérií pro dělitelnost je v dnešní době zbytečná – nejrychlejší je přece vydělit jedno číslo druhým pomocí kalkulačky či počítače. To je ale pravda jen pro relativně malá čísla. Při experimentálním ověřování různých matematických hypotéz (např. v teorii čísel) je nutné brát v úvahu i velká čísla s tisíci nebo více ciframi. Pak je běžná kalkulačka k ničemu a musíme použít vhodný počítačový program (*Wolfram Mathematica*, *Sage* apod.), který zvládne práci s velkými čísly. I v takových případech je ale zjišťování dělitelnosti dělením zbytečně pomalé – důmyslnější algoritmy vystačí s opakovaným sčítáním, odčítáním a násobením. Patří k nim i metody popsané v tomto příspěvku, které se dají poměrně snadno implementovat v běžných programovacích jazycích (může to být vhodný úkol pro studenty se zájmem o programování).

1 Úvodní pozorování

Je-li přirozené číslo dělitelné šesti, jistě musí být dělitelné dvěma a třemi. Tato nutná podmínka je i postačující, neboť 2 a 3 jsou nesoudělná čísla. Toto pozorování můžeme snadno zobecnit: *Nechť m je libovolné přirozené číslo s prvočíselným rozkladem*

$$m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}.$$

Pak libovolné přirozené číslo je dělitelné číslem m, právě když je dělitelné čísly $p_1^{n_1}, \ldots, p_k^{n_k}$. Stačí tedy znát kritéria pro dělitelnost čísly, jež jsou mocninami prvočísel. Následující věta zobecňuje známá kritéria pro dělitelnost 2, 4, 5 a 8.

Věta 1. *Přirozené číslo n je dělitelné číslem 2^k, resp. 5^k, právě když poslední k-číslí n je dělitelné 2^k, resp. 5^k.*

Důkaz. Zapišme n ve tvaru $a \cdot 10^k + b$, kde b je poslední k-číslí n. Číslo 10^k je vždy dělitelné čísly 2^k i 5^k. Jelikož a je celé číslo, vidíme, že n je dělitelné číslem 2^k, resp. 5^k, právě když je tímto číslem dělitelné b. $\square$

2 Pascalova metoda

Připomeňme známá kritéria pro dělitelnost třemi a devíti: *Přirozené číslo je dělitelné třemi, resp. devíti, právě když jeho ciferný součet je dělitelný třemi, resp. devíti.*

Ukážeme, že ve skutečnosti platí silnější tvrzení – ciferný součet lze použít nejen k ověření dělitelnosti, ale i k výpočtu zbytku libovolného čísla při dělení třemi nebo devíti.

Věta 2. *Přirozené číslo a jeho ciferný součet mají při dělení třemi nebo devíti stejný zbytek.*

Důkaz. Libovolné přirozené číslo n lze vyjádřit ve tvaru

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + n_0, \tag{1}$$

kde $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ jsou cifry v desítkovém zápisu čísla n. Každá z mocnin desítky má při dělení třemi nebo devíti zbytek 1, neboť

$$10^i = \underbrace{99\cdots9}_{i\text{-krát}} + 1$$

a první sčítanec na pravé straně je dělitelný devíti. Každý člen $n_i \cdot 10^i$ ve vztahu (1) si můžeme představit jako součet

$$n_i \cdot 10^i = \underbrace{10^i + \cdots + 10^i}_{n_i\text{-krát}},$$

má proto při dělení třemi nebo devíti stejný zbytek jako n_i. Tudíž číslo n má stejný zbytek jako jeho ciferný součet $n_k + n_{k-1} + \cdots + n_0$. $\square$

Pro ilustraci uveďme následující úlohu z rekreační matematiky.

Úloha 1. [1] Lze mezi cifry 123456789 vložit znaménka operací $+$ a $-$ tak, abychom získali výsledek 100? Pokud ano, lze stejného výsledku dosáhnout jen pomocí operace $+$?

Řešení. K výsledku 100 lze dojít následujícím způsobem:

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100.$$

Jen s využitím sčítání nelze stejného výsledku dosáhnout. Vložíme-li znaménka $+$ na libovolná místa, dostaneme jisté číslo tvaru

$$n = a_1 + \cdots + a_k.$$

Každý sčítanec a_i má podle věty 2 při dělení třemi stejný zbytek jako jeho ciferný součet c_i. Číslo n má tedy stejný zbytek jako $c_1 + \cdots + c_k$. Mezi ciframi čísel $a_1, \ldots, a_k$ se vyskytuje právě jedna jednička, jedna dvojka, atd. Platí tedy $c_1 + \cdots + c_k = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$. Ukázali jsme, že číslo n má při dělení třemi stejný zbytek jako 45, čili 0. Nemůže tedy platit $n = 100$, neboť 100 není dělitelné třemi.

Může se stát, že ciferný součet čísla je velký a neumíme přímo určit jeho zbytek při dělení třemi nebo devíti; v takovém případě lze větu 2 použít opakovaně, počítat ciferný součet ciferného součtu, atd.

Abychom si v dalším textu usnadnili vyjadřování, budeme používat zápis $a \equiv b \pmod{m}$, který znamená, že dvě celá čísla a, b mají stejný zbytek při dělení přirozeným číslem m.[2] Čtenář si snadno rozmyslí[3], že pokud navíc platí $c \equiv d \pmod{m}$, platí též $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ a dále $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Podobný postup jako v důkazu věty 2 nás dovede ke kritériu pro dělitelnost jedenácti.

[1] Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 5.

[2] Tento zápis čteme „a je kongruentní s b modulo m“. Ekvivalentně lze říct, že rozdíl $a - b$ je dělitelný m.

[3] Viz též [McD], kapitola *The Beginnings of Divisibility.*

Věta 3. *Přirozené číslo má při dělení* 11 *stejný zbytek jako rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a součtu cifer na sudých pozicích, jsou-li pozice počítány zprava.*

Důkaz. Zkusíme-li počítat zbytky mocnin desítky při dělení jedenácti, dostaneme

$$\begin{aligned} 10^0 = 1 &\equiv 1 \pmod{11}, \\ 10^1 = 10 &\equiv -1 \pmod{11}, \\ 10^2 = 100 &\equiv 1 \pmod{11}, \\ 10^3 = 1000 &\equiv -1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Obecně platí

$$10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}, \tag{2}$$

neboť

$$10^i = \underbrace{10 \cdots 10}_{i\text{-krát}} \equiv \underbrace{(-1) \cdots (-1)}_{i\text{-krát}} \pmod{11}.$$

Libovolné přirozené číslo n lze vyjádřit ve tvaru

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + n_0,$$

kde $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ jsou cifry v desítkovém zápisu čísla n. S ohledem na vztah (2) tedy platí

$$n \equiv n_k \cdot (-1)^k + n_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} + \cdots + n_0 \cdot 1 \pmod{11}.$$

Výraz vpravo je rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a součtu cifer na sudých pozicích, jsou-li pozice počítány zprava. □

Pro dělitelnost 11 plyne z věty 3 následující důsledek, u nějž již není podstatné, zda jsou pozice cifer počítány zprava či zleva.

Důsledek 1. *Přirozené číslo je dělitelné* 11, *právě když rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a součtu cifer na sudých pozicích je dělitelný* 11.

Je známo, že dělitelnost jedenácti se využívá u rodných čísel přidělovaných občanům České republiky (dříve Československa). Rodná čísla jsou desetimístná a poslední čtyřčíslí je vždy voleno tak, aby výsledné číslo bylo dělitelné jedenácti. Tento mechanismus slouží jako jednoduchá kontrola proti překlepům (viz [Wi]).

Máme-li např. rodné číslo 736028/5163, můžeme pomocí věty 3 nebo důsledku 1 snadno zkontrolovat, že je (po odstranění lomítka) dělitelné jedenácti:

$$-7 - 6 - 2 - 5 - 6 + 3 + 0 + 8 + 1 + 3 = -11 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Postup z důkazů vět 2 a 3 můžeme zobecnit následujícím způsobem, čímž dostaneme obecnou Pascalovu metodu pro testování dělitelnosti libovolným přirozeným číslem m:

- Pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ najdeme $a_i \in \mathbb{Z}$ takové, že $10^i \equiv a_i \pmod{m}$.
- Pro libovolné přirozené číslo $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + n_0$ platí
$$n \equiv n_k a_k + n_{k-1} a_k + \cdots + n_0 a_0 \pmod{m}.$$

Platnost tvrzení je zřejmá. Za čísla a_i obvykle volíme zbytky čísel 1, 10, 100, … při dělení číslem m (v důkazu věty 2 to byly jedničky), není to však jediná možnost. Někdy může být pohodlnější volit číslo, které je v absolutní hodnotě menší. Např. v důkazu věty 3 by zbytky z mocnin 10 při dělení jedenácti byly 1, 10, 1, 10, …; volbou 1, −1, 1, −1, … jsme dosáhli toho, že výsledné kritérium je jednodušší.

Požadovaných čísel a_0, a_1, … je nekonečně mnoho, pokud je však volíme z množiny $\{0, \ldots, m-1\}$, musíme dříve či později narazit na člen a_ℓ, který se shoduje s a_0. Pro všechna $j \in \mathbb{N}$ pak platí

$$a_{\ell+j} \equiv 10^{\ell+j} = 10^\ell 10^j \equiv a_\ell a_j = a_0 a_j \equiv 10^0 \cdot 10^j = 10^j \equiv a_j \pmod{m}.$$

Odtud plyne $a_{\ell+j} = a_j$ pro všechna $j \in \mathbb{N}_0$, tj. čísla a_0, a_1, … se opakují s periodou ℓ.

Pro ilustraci ukažme, jak lze Pascalovou metodou odvodit kritérium pro dělitelnost sedmi. Pro mocniny desítky při dělení sedmi platí

$$\begin{aligned}
10^0 &\equiv 1 && \pmod{7},\\
10^1 &\equiv 3 && \pmod{7},\\
10^2 &\equiv 10^1 \cdot 10^1 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 && \pmod{7},\\
10^3 &\equiv 10^1 \cdot 10^2 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 && \pmod{7},\\
10^4 &\equiv 10^1 \cdot 10^3 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 4 && \pmod{7},\\
10^5 &\equiv 10^1 \cdot 10^4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 5 && \pmod{7},\\
10^6 &\equiv 10^1 \cdot 10^5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 1 && \pmod{7},
\end{aligned}$$

můžeme tedy volit $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$ a pokračovat dále s periodou 6. Pro libovolné přirozené číslo

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + n_0$$

tedy platí

$$n \equiv n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot 3 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 6 + n_4 \cdot 4 + n_5 \cdot 5 + \cdots \pmod{m}.$$

Výsledek můžeme zformulovat ve formě následujícího tvrzení, které zobecňuje kritérium pro dělitelnost sedmi zmíněné v úvodu této kapitoly.

Věta 4. *Zbytek libovolného čísla při dělení sedmi je stejný jako zbytek čísla získaného tak, že první, druhou, třetí, … číslici odzadu násobíme postupně čísly periodicky se opakující posloupnosti* 1, 3, 2, 6, 4, 5, … *a takto vypočtené součiny sečteme.*

3 Zbikowského metoda

Mnohem jednodušší kritérium pro dělitelnost sedmi je založeno na následujícím pozorování: Pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$10a + b = 10(a - 2b) + 21b.$$

Druhý sčítanec je dělitelný 7, z čehož plyne, že $10a+b$ je dělitelné sedmi, právě když $10(a-2b)$ je dělitelné 7. Jelikož 7 je nesoudělné s 10, ukázali jsme, že $10a + b$ je dělitelné sedmi, právě když $a - 2b$ je dělitelné 7.

Libovolné přirozené číslo n lze zapsat ve tvaru $10a+b$; za číslo b volíme poslední cifru n, jejímž odtržením získáme číslo a. Chceme-li otestovat dělitelnost čísla n sedmi, stačí místo něj prověřit číslo $a - 2b$. Je-li toto číslo příliš velké, můžeme postup opakovat.

Úloha 2. Je číslo 2786 dělitelné sedmi?

Řešení. Volíme $a = 278$ a $b = 6$, čímž získáme $a-2b = 266$. K otestování tohoto čísla volíme $a = 26$ a $b = 6$, čímž obdržíme $a - 2b = 14$. Tento výsledek je dělitelný sedmi, tedy i 2786 je dělitelné sedmi.

V předchozích úvahách lze číslo 7 všude nahradit číslem 3 nebo 21. Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Věta 5. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, pak číslo $10a+b$ je dělitelné 3, resp. 7, resp. 21, právě když $a - 2b$ je dělitelné 3, resp. 7, resp. 21.*

Zkusme odvodit podobná kritéria pro dělitelnost jinými čísly. Ze vztahů

$$10a + b = 10(a + 4b) - 39b,$$
$$10a + b = 10(a - 5b) + 51b,$$
$$10a + b = 10(a + 2b) - 19b,$$

plynou obdobně jako výše následující tvrzení.

Věta 6. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, pak číslo $10a+b$ je dělitelné 13, resp. 39, právě když $a + 4b$ je dělitelné 13, resp. 39.*

Věta 7. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, pak číslo $10a+b$ je dělitelné 17, resp. 51, právě když $a-5b$ je dělitelné 17, resp. 51.*

Věta 8. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, pak číslo $10a+b$ je dělitelné 19, právě když $a+2b$ je dělitelné 19.*

Úloha 3. Je číslo 8322 dělitelné devatenácti?

Řešení. Volíme $a = 832$ a $b = 2$, čímž získáme $a+2b = 836$. K otestování tohoto čísla volíme $a = 83$ a $b = 6$, čímž obdržíme $a+2b = 95$. V posledním kroku vezmeme $a = 9$ a $b = 5$, čímž dojdeme k výsledku $a+2b = 19$. Ten je dělitelný devatenácti, tedy i 8322 je dělitelné devatenácti.

Doporučujeme čtenáři, aby zkusil porovnat rychlost řešení předchozí úlohy pomocí Zbikowského metody s přímým výpočtem 8322 : 19.

Ukážeme, jak hledat další rozklady čísla $10a+b$, které umožní formulovat kritéria pro dělitelnost libovolným číslem m. S ohledem na úvahy provedené v části 1 víme, že stačí vyšetřit případ, kdy m je mocnina prvočísla různého od 2 a 5. Pro další postup dokonce stačí předpokládat, že m je nesoudělné s 10. V takovém případě musí m končit některou z cifer 1, 3, 7, 9.

Zkusme se inspirovat dříve uvedenými výsledky a hledat rozklad $10a+b$ ve tvaru, kde první sčítanec je desetinásobkem výrazu $a-kb$ pro zatím neurčené celé číslo k:

$$10a + b = 10(a - kb) + 10kb + b = 10(a - kb) + b(10k + 1). \qquad (3)$$

Najdeme-li k tak, aby $10k+1$ bylo dělitelné m, dostaneme následující obecné kritérium.

Věta 9. *Jsou-li $a, b, k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ je nesoudělné s 10 a $10k+1$ je dělitelné m, pak číslo $10a+b$ je dělitelné m, právě když $a-kb$ je dělitelné m.*

Nalezení vhodného k je ekvivalentní s následující otázkou: Lze m vynásobit jistým číslem tak, abychom dostali číslo tvaru $10k+1$, tj. číslo končící jedničkou? Následující tabulka ukazuje, že odpověď je vždy kladná.

Jakou cifrou končí m?	**Jakým číslem násobíme?**
1	1
3	7
7	3
9	9

Vraťme se pro ilustraci k dělitelnosti 7. Abychom dostali číslo končící jedničkou, násobíme třemi a dostaneme $7 \cdot 3 = 21 = 10k + 1$, kde $k = 2$. Věta 9 pak poskytuje kritérium pro dělitelnost 7 zformulované ve větě 5.

Podobně např. $m = 17$ násobíme trojkou, čímž dostaneme $17 \cdot 3 = 51 = 10k+1$, kde $k = 5$. Věta 9 pak poskytuje kritérium pro dělitelnost 17 zformulované ve větě 7.

Úloha 4. Odvoďte kritérium pro dělitelnost číslem 41 a zjistěte, zda 10 168 je dělitelné 41.

Řešení. Protože $m = 41$ končí jedničkou, násobíme jedničkou a dostaneme $41 = 10k + 1$, kde $k = 4$. Kritérium pro dělitelnost 41 tedy zní: Jsou-li $a, b \in \mathbb{Z}$, pak číslo $10a + b$ je dělitelné 41, právě když $a - 4b$ je dělitelné 41.

K otestování čísla 10 168 volíme $a = 1016$ a $b = 8$, čímž dostaneme $a - 4b = 984$. Dále volíme $a = 98$ a $b = 4$, čímž dostaneme $a - 4b = 82$. Toto číslo je dělitelné 41, tedy i 10 168 je dělitelné 41.

Je-li $10k+1$ dělitelné m, pak i $10(k-m)+1$ je dělitelné m. Nahradíme-li v rozkladu (3) číslo k číslem $k-m$, dostaneme alternativní rozklad

$$10a + b = 10(a + (m - k)b) + (10(k - m) + 1)b,$$

z nějž plyne následující varianta Zbikowského kritéria.

Věta 10. *Jsou-li $a, b, k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ je nesoudělné s 10 a $10k + 1$ je dělitelné m, pak číslo $10a + b$ je dělitelné m, právě když $a + (m - k)b$ je dělitelné m.*

Tato věta je výhodnější v případech, kdy výpočet $a + (m - k)b$ je snazší než výpočet $a - kb$.

Uvažujme např. $m = 13$. Abychom dostali číslo končící jedničkou, násobíme sedmi a dostaneme $13 \cdot 7 = 91 = 10k + 1$, kde $k = 9$. Věta 9 pak tvrdí, že $10a + b$ je dělitelné 13, právě když $a - 9b$ je dělitelné 13. Naproti tomu ve větě 10 máme $m - k = 13 - 9 = 4$ a věta tvrdí, že $10a + b$ je dělitelné 13, právě když $a + 4b$ je dělitelné 13; tento výsledek již známe z věty 6. Obě kritéria jsou správná, pro většinu osob je však příjemnější počítat $a + 4b$ namísto $a - 9b$.

Podobně můžeme postupovat pro $m = 19$. Abychom dostali číslo končící jedničkou, násobíme devíti a dostaneme $19 \cdot 9 = 171 = 10k + 1$, kde $k = 17$. Věta 9 pak tvrdí, že $10a+b$ je dělitelné 19, právě když $a-17b$ je dělitelné 19. Ve větě 10 máme $m - k = 19 - 17 = 2$ a věta tvrdí, že

$10a+b$ je dělitelné 19, právě když $a+2b$ je dělitelné 19. Tento výsledek již známe z věty 8 a rozdíl v praktické použitelnosti oproti prvnímu kritériu je ještě výraznější.

Pro čtenáře obeznámené se základy algebry připojíme ještě jiný pohled na věty 9 a 10.

Poznámka 1. Je-li $m \in \mathbb{N}$ nesoudělné s deseti, je známo, že existuje číslo $\ell \in \{0, \ldots, m-1\}$ splňující $10\ell \equiv 1 \pmod{m}$; jde o inverzní prvek k 10 v okruhu $\mathbb{Z}_m$. Volíme-li libovolné celé číslo k splňující $k \equiv -\ell \pmod{m}$, pak

$$10k \equiv -1 \pmod{m},$$

což je pouze jiné vyjádření skutečnosti, že $10k+1$ je dělitelné m. Ze vztahu (3) pak plyne, že $10a+b$ je dělitelné m, právě když $a-kb$ je dělitelné m. Číslo k ve větě 9 lze tedy volit jako libovolné číslo kongruentní s minus inverzním prvkem k 10 v $\mathbb{Z}_m$. Je-li k libovolné číslo s touto vlastností, pak $k-m$ má tutéž vlastnost, a větu 10 lze získat z věty 9, pokud místo k píšeme $k-m$.

Např. pro $m=19$ je inverzním prvkem k 10 v $\mathbb{Z}_m$ číslo $\ell = 2$. Volíme-li tedy např. $k=-2$, resp. $k=17$, pak $a-kb$ je rovno $a+2b$, resp. $a-17b$, což je ve shodě s naším dřívějším výpočtem.

4 Historické a bibliografické poznámky

Metodu vyloženou v oddíle 2 objevil B. Pascal kolem roku 1658. Popsal ji v pojednání *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis*, které je součástí jeho sebraných spisů [Pas]. Jako příklad uvedl kritérium pro dělitelnost sedmi formulované ve větě 4.

Autorem metody popsané v oddíle 3 je ruský matematik A. K. Zbikowski, který ji publikoval roku 1861 v práci [Zb]. Ta zůstala téměř bez povšimnutí, během 20. století však stejný postup nezávisle objevili další matematikové. I v současnosti je však Zbikowského kritérium relativně málo známé. Náš výklad je inspirován především články [ChM] a [Ga].

Pěkný historický přehled kritérií dělitelnosti včetně jejich nejrůznějších modifikací je k dispozici na webové stránce [McD]. Za pozornost stojí též čtivý článek [Ren], kde jsou na pouhých čtyřech stranách zformulována a dokázána kritéria pro dělitelnost všemi čísly od 2 do 102.

Literatura

[Ga] S. Ganzell: *Divisibility tests, old and new.* The College Mathematics Journal 48 (2017), 36–40.

[ChM] Y. Cherniavsky, A. Mouftakhov: *Zbikowski's divisibility criterion.* The College Mathematics Journal 45 (2014), 17–21.

[McD] E. L. McDowell: *Divisibility tests: A history and user's guide.* Convergence (May 2018) [online]. Dostupné z https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/divisibility-tests-a-history-and-users-guide.

[Op] Z. Opava: *Matematika kolem nás.* Albatros, 1989.

[Pas] B. Pascal: *Oeuvres complètes.* Gallimard, 1954.

[Ren] M. Renault: *Stupid divisibility tricks. 101 ways to stupefy your friends.* Math Horizons 14 (2006), 18–42.

[Si] D. Singmaster: *Problems for metagrobologists. A collection of puzzles with real mathematical, logical or scientific content.* World Scientific, 2016.

[Wi] *Wikipedie: Rodné číslo* [online]. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Rodné_číslo.

[Zb] A. Zbikowski: *Note sur la divisibilité des nombres*, Bull. Acad. Sci. St. Petersbourg 3 (1861), 151–153.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
slavik@karlin.mff.cuni.cz