

Letmý pohled na příběh dánské matematiky

Antonín Slavík, Jiří Veselý

Abstrakt. Článek se zaměřuje na osudy a vědecký přínos významných představitelů dánské matematiky z druhé poloviny 19. století a první poloviny 20. století. Popisuje vznik, vývoj a klíčové aktivity Dánské matematické společnosti, která podstatně ovlivnila matematickou scénu v Dánsku i vývoj matematiky v širším mezinárodním kontextu.

1. Úvod

Co spojuje české země s Dánským královstvím? Znalci historie si možná vybaví, že česká princezna Markéta Přemyslovna (1186–1213), dcera Přemysla Otakara I. (1155/1167–1230), se roku 1205 provdala za dánského krále Valdemara II. (1170–1241). Svatba se konala v Lübecku, kde Markéta přijala jméno Dagmar. V Dánsku si rychle získala oblibu, ale její život skončil tragicky – zemřela při porodu druhého syna.

Také je známo, že slavný dánský astronom Tycho Brahe (1546–1601) prožil poslední tři roky svého života v Čechách, kam byl pozván císařem Rudolfem II., a spolupracoval zde s Johannem Keplerem (1571–1630). Je pohřben v pražském Týnském chrámu.

Historie vzdělávání a vědy v Dánsku v mnohém připomíná vývoj v českých zemích. Kodaňskou univerzitu (*Københavns Universitet*) založil roku 1479 král Kristián I. poté, co získal souhlas papeže Sixta IV. Stejně jako pražská univerzita měla čtyři fakulty – filozofickou, lékařskou, právníkou a teologickou – jen vznikla o přibližně 130 let později. Naopak Královská dánská akademie věd a literatury (*Det Kongelige Danske Videnskabskabernes Selskab*), založená roku 1742, je starší než Královská česká společnost nauk, předchůdkyně naší Akademie věd.

Založení kodaňské polytechniky (*Den Polytekniske Lærestalt*) v roce 1829 je především zásluhou fyzika a profesora Kodaňské univerzity Hanse Christiana Ørsted (1777–1851), který se stal jejím prvním rektorem. Inspirací mu byla slavná pařížská *École Polytechnique*, kterou Ørsted navštívil během svých studií. V roce 1933 byla instituce přejmenována na *Danmarks tekniske Højskole* a dnes nese název *Danmarks Tekniske Universitet*.

V dalším textu se zaměříme na dánskou matematiku. Poučeným čtenářům se možná vybaví jména jako Jørgen Mohr (1640–1697), který ukázal, že k eukleidovským konstrukcím není třeba pravítka, ale stačí pouze kružítko, nebo také Caspar Wessel (1745–1818), jenž jako první popsal geometrický význam komplexních čísel. Do takto vzdálené minulosti se však vracet nebudeme; pozornost soustředíme na druhou polovinu 19. století a první polovinu 20. století – období, kdy se dánská matematika začala dynamicky rozvíjet a získávat mezinárodní uznání.

Z filozofické fakulty Kodaňské univerzity se v roce 1850 oddělila samostatná fakulta matematiky a přírodních věd. Roku 1859 začal vycházet časopis *Matematisk Tidsskrift*, který se později rozdělil na dvě části: část A, zaměřenou na elementární matematiku, a část B, publikující výsledky pokročilého výzkumu (viz též [43]).

doc. RNDr. ANTONÍN SLAVÍK, Ph.D., DSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz, doc. RNDr. JIŘÍ VESELÝ, CSc., Kolínská 15, 130 00 Praha 3, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz

Univerzita a polytechnika v Kodani měly zpočátku jediného společného profesora matematiky – Adolpha Steena (1816–1886), který byl spíše schopným organizátorem a politikem než výraznou vědeckou osobností. Podařilo se mu na univerzitě prosadit zřízení druhé matematické profesury, kterou následně získal Hieronymous Georg Zeuthen (1839–1920). Ten úzce spolupracoval se svým vrstevníkem a kolegou z polytechniky, Juliem Peterem Christianem Petersenem (1839–1910).

Dánská matematická společnost (dále DMS) vznikla přibližně o deset let později než studentský *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*, ze kterého se postupně vyvinula naše *Jednota*. Vznik dánské společnosti inicioval matematik a astronom Thorvald Nicolai Thiele (1838–1910), ředitel kodaňské hvězdárny a badatel v oblasti statistiky, pojistné matematiky, teorie interpolace a problému tří těles.

Cílem nově vzniklé společnosti bylo podporovat spolupráci mezi matematiky a rozvíjet praktické využití matematiky; později k tomu přibyl i důraz na péči o kvalitní výuku. Zakládající schůze byla oznámena v tisku a konala se 8. října 1873 v Kodani. Na programu byla přednáška Adolpha Steena o vývoji dánské matematiky v první polovině 19. století, schválení stanov a volba prvního předsednictva, které tvořili Thiele, Petersen a Zeuthen.

Společnost měla zpočátku 65 členů. Jejím cílem bylo sdružovat zájemce o matematiku, shromažďovat odbornou literaturu a pořádat přednášky. Zpočátku vystupovali pouze domácí členové, prvním zahraničním přednášejícím byl roku 1900 švédský matematik Gösta Mittag-Leffler (1846–1927). Zahraničních návštěvníků postupně přibývalo, např. v období 1918–1934 k nim podle archivu DMS patřili A. Sommerfeld (1919), G. H. Hardy (1919, 1921, 1924, 1925, 1932), A. Einstein (1920), E. Landau (1920, 1924), D. Hilbert (1921), P. Ehrenfest (1921), L. G. du Pasquier (1922), E. Hecke (1923), R. Courant (1923), É. Borel (1924), F. Riesz (1924), C. Carathéodory (1925), H. Kneser (1925), W. Pauli (1925), W. Blaschke (1925), B. von Kerékjártó (1925), H. Lebesgue (1926), G. Pólya (1926), M. Riesz (1926, 1934), E. Hille (1927), A. Weil (1927), J. E. Littlewood (1928), J. Favard (1928), E. Artin (1929, 1931), G. Julia (1929, 1932), A. Wintner (1929), T. Carleman (1930), W. Fenchel (1931), M. Fréchet (1933), M. Dehn (1934), P. Lévy (1934), V. Brun (1934), O. Neugebauer (1934).

Počátky činnosti DMS před rokem 1905 nejsou dobře zdokumentovány. Společnost se scházela v jedné z kodaňských restaurací a veškeré archiválie uchovávala v krabici ve sklepě. Kolem roku 1890 krabice z neznámých důvodů zmizela a nepodařilo se ji najít.

S ohledem na ztracené archivní materiály a poněkud neformální charakter rané činnosti společnosti již není možné zjistit jména předsedů před rokem 1892. Prvním doloženým předsedou byl Johan Jensen (1892–1903), po něm následovali Vilhelm Herman Oluf Madsen (1903–1910), Niels Nielsen (1910–1917), Johannes Peter Mollerup (1917–1926), Harald Bohr (1926–1929, 1936–1951), Johan Frederik Steffensen (1930–1936), Frederik Fabricius-Bjerre (1951–1954), Børge Jessen (1954–1958), Werner Fenchel (1958–1962) a další. Většině z těchto osobností se budeme podrobněji věnovat v následujícím textu.¹

¹Ke druhému a třetímu předsedovi uvedme aspoň stručnou poznámku: Madsen (1844–1917) byl vysoký armádní důstojník, později ministr a poslanec dánského parlamentu; matematiku vyučoval na vojenské akademii a napsal několik učebnic. Nielsen (1865–1931) působil na Kodaňské univerzitě, zabýval se speciálními funkcemi a historií matematiky. Seznam dalších předsedů lze najít na webu https://da.wikipedia.org/wiki/Dansk_Matematisk_Forening.

Zájemcům o podrobnější historii DMS doporučujeme např. text [42] dánského historika matematiky Kurta Ramskova (*1964).

2. Julius Petersen

Nejprve se zastavme u výše zmíněného Julia Petersena, jednoho ze zakladatelů DMS, jehož jméno dodnes žije především v teorii grafů.

Od dětství jej pojilo přátelství s Hieronymem Zeuthenem, se kterým bydleli ve stejné ulici. Hlubší zájem o matematiku se u něj projevil na střední škole, kde se s nadšením věnoval pokusům o trisekci úhlu pomocí pravítka a kružítka. V letech 1856–1860 studoval na kodaňské polytechnice, roku 1862 se zapsal na Kodaňskou univerzitu. Současně vyučoval šest dní v týdnu na soukromé škole, aby uživil sebe, svou manželku a děti. Roku 1867 získal magisterský titul a v roce 1871 obhájil doktorskou práci zaměřenou na řešení rovnic v radikálech a na eukleidovské konstrukce. V letech 1871–1877 působil jako docent na polytechnice, poté až do konce života zastával místo profesora matematiky na Kodaňské univerzitě.

Petersen se věnoval širokému spektru témat: geometrii, teorii čísel, kombinatorice, diferenciálním rovnicím, komplexní analýze, matematické fyzice, ale také kryptografii a matematické ekonomii. Napsal řadu středoškolských i vysokoškolských učebnic věnovaných nejrozličnějším tématům.

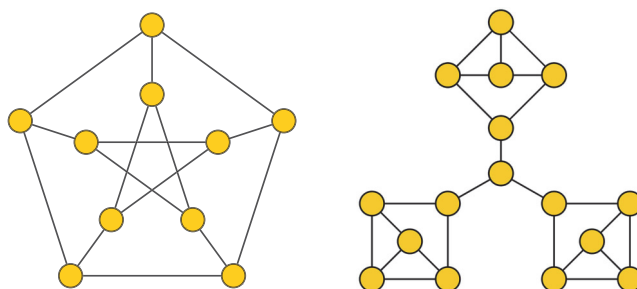
Petersenův článek *Die Theorie der regulären Graphs* [39] z roku 1891 je považován za historicky první pojednání z teorie grafů. Původní motivací byl přitom jistý algebraický problém z teorie invariantů. Myšlenka přeformulovat tuto úlohu do podoby problému z teorie grafů vzešla od Jamese Josepha Sylvestera (1814–1897), se kterým si Petersen dopisoval. Článek přináší základní výsledky týkající se faktorizace regulárních grafů.

Připomeňme, že graf se nazývá d -regulární, pokud každý jeho vrchol má stupeň d , tj. je incidentní s právě d hranami. Podgraf libovolného (ne nutně regulárního) grafu obsahující všechny jeho vrcholy, který je r -regulární, nazýváme r -faktorem. V nejjednodušším případě $r = 1$ hovoříme o perfektním párování; příslušný 1-regulární podgraf je pak množina hran taková, že každý vrchol grafu je incidentní s právě jednou hranou.

Petersen se zabýval r -faktorizací, tedy otázkou, zda je možné daný graf rozložit na hranově disjunktní r -faktory. Je zřejmé, že každý graf, který má r -faktorizaci, musí být d -regulární, kde d je násobkem r . Ta podmínka je však obecně pouze nutná, nikoliv postačující. Např. známý Petersenův graf² znázorněný na obr. 1 vlevo je sice 3-regulární, avšak neexistuje jeho rozklad na tři 1-faktory, tj. nemá 1-faktorizaci.

Nejjednodušší situace nastává u 2-faktorizace: Petersen ukázal, že v tomto případě je nutná podmínka zároveň i postačující – graf má 2-faktorizaci právě tehdy, když je d -regulární pro nějaké sudé $d \in \mathbb{N}$. Ve svém důkazu využil skutečnost, že graf, v němž mají všechny vrcholy sudý stupeň, lze nakreslit jedním tahem. Petersen tuto vlastnost podrobně vysvětluje – není jasné, zda si byl vědom, že stejný problém řešil již mnohem dříve Leonhard Euler (1707–1783) v souvislosti se slavným problémem sedmi mostů města Královce. Petersen byl totiž znám tím, že jen zřídka studoval práce jiných matematiků, a tak často nezávisle znovu objevoval dříve známé výsledky.

²Tento graf se objevuje až v pozdějším krátkém Petersenově textu [40]. Stejnou geometrickou konfiguraci však v jiném kontextu popsal již roku 1886 Alfred Kempe (1849–1922).



Obr. 1. Petersenův graf vlevo nemá 1-faktorizaci, lze jej však rozložit na 2-faktor (pětiúhelník a pentagram) a 1-faktor (příčky, které je spojují). Graf vpravo je 3-regulární, ale neobsahuje žádný 1-faktor

Složitější je situace u 1-faktorizace. Regularita je zde opět nutnou, nikoli však postačující podmínkou – např. graf na obr. 1 vpravo je 3-regulární, přesto neobsahuje žádný 1-faktor. Postačující podmínku pro existenci 1-faktoru udává Petersenova věta, která je běžně formulována takto: *Každý 3-regulární graf bez mostů obsahuje 1-faktor*. Mostem se rozumí hrana, jejímž odstraněním se zvýší počet souvislých komponent grafu (např. graf na obr. 1 vpravo obsahuje tři mosty). Původní Petersenova formulace této věty je mírně odlišná, místo mostů se v ní hovoří o listech, přičemž tento termín měl jiný význam, než je v současnosti běžné.

Petersenovy výsledky v oblasti teorii grafů jsou právem oceňovány. V klasické publikaci o historii teorie grafů [6] najdeme komentované anglické překlady vybraných pasáží z jeho prací. Jubilejní stý svazek časopisu *Discrete Mathematics*, vydaný v roce 1992 u příležitosti 150. výročí Petersenova narození, je celý věnován jeho odkazu. Obsahuje podrobný životopis, soupis jeho prací, rozbor výsledků týkajících se faktorizace regulárních grafů a řadu dalších příspěvků. Z české literatury lze doporučit publikaci [48].

3. Johan Jensen

Prvním historicky doloženým předsedou DMS byl Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925). Od roku 1876 studoval na kodaňské polytechnice, kde jej nejvíce zaujala matematika. První odborné články publikoval ještě jako student. Přesto se nevydal na dráhu profesionálního matematika; patrně z finančních důvodů v roce 1881 nastoupil do nově založené dánské pobočky Bellovy telefonní společnosti, která se následně transformovala v Kodaňskou telefonní společnost. Roku 1890 se stal ředitelem jejího technického oddělení, kde setrval až do roku 1924. Ačkoliv se matematice věnoval pouze ve volném čase, dosáhl významných výsledků a jeho přínos byl všeobecně uznáván.

Jensen se jako první matematik systematicky zabýval konvexními funkcemi. Na toto téma proslovil 17. ledna 1905 v rámci DMS přednášku, která byla téhož roku publikována v dánštině [26] a o rok později ve francouzském překladu [27]. Ve své práci Jensen vychází z následující definice: Řekneme, že reálná funkce φ je na daném

intervalu konvexní, pokud platí nerovnost

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1)$$

pro všechna x, y z tohoto intervalu. Při opačné nerovnosti hovoříme o konkávní funkci. Stačí však studovat pouze konvexní funkce, neboť φ je konkávní právě tehdy, když $-\varphi$ je konvexní.

Jensen uvádí několik příkladů a konstatuje, že třída konvexních funkcí je uzavřená na sčítání a násobení kladnými čísly. Dále ukazuje, že pokud je funkce φ dvakrát spojitě diferencovatelná, pak z věty o střední hodnotě vyplývá vztah

$$\varphi(x) + \varphi(y) - 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 f''(\xi),$$

kde ξ leží mezi x a y . Z toho plyne známé kritérium: Je-li druhá derivace nezáporná, pak je funkce φ konvexní.

Další část práce je věnována odvození nerovnosti, která nese Jensenovo jméno. Nechť φ je konvexní funkce definovaná na určitém intervalu. Opakovaným použitím definice konvexity zjistíme, že pro libovolné čtyři hodnoty x_1, x_2, x_3, x_4 z tohoto intervalu platí

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \varphi(x_4) &\geq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \\ &\geq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right). \end{aligned}$$

Indukcí pro každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme obecnější vztah

$$\sum_{i=1}^{2^m} \varphi(x_i) \geq 2^m \varphi\left(2^{-m} \sum_{i=1}^{2^m} x_i\right).$$

Chceme-li získat podobnou nerovnost pro libovolné přirozené číslo n , zvolíme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $2^m \geq n$, a doplníme posloupnost $x_1, \dots, x_n$ na délku 2^m hodnotami

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2^m} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Z předchozí nerovnosti pak plyne

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) + (2^m - n)\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq 2^m \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right),$$

což po úpravě dává

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i).$$

Jensen poznamenává, že postup je inspirován Cauchyovým důkazem nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Ze získané nerovnosti speciálně plyne, že pro libovolná přirozená čísla $n_1, \dots, n_m$ a $n = n_1 + \dots + n_m$ platí

$$\varphi\left(\frac{n_1x_1 + \dots + n_mx_m}{n}\right) \leq \frac{n_1\varphi(x_1) + \dots + n_m\varphi(x_m)}{n}. \quad (2)$$

K odvození obecné podoby Jensenovy nerovnosti zbývá poslední krok. Pokud φ je spojitá konvexní funkce, pak pro libovolná kladná reálná čísla $a_1, \dots, a_m$ platí

$$\varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^m a_i x_i}{\sum_{i=1}^m a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^m a_i \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^m a_i}. \quad (3)$$

Tato obecná forma Jensenovy nerovnosti plyne z toho, že reálné váhy $\frac{a_i}{a}$, kde $a = \sum_{i=1}^m a_i$, lze s libovolnou přesností aproximovat racionálními čísly $\frac{n_i}{n}$. Použitím nerovnosti (2) pro racionální váhy a následným limitním přechodem spolu se spojitostí funkce φ získáme tvrzení (3).

Jensen podrobně vysvětluje, že vhodnou volbou funkce φ lze z nerovnosti (3) odvodit řadu jiných užitečných nerovností. Patří mezi ně např. Cauchyova–Schwarzova nerovnost (pro $\varphi(x) = x^2$) nebo různá zobecnění nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ($\varphi(x) = \log x$); podrobnosti lze nalézt např. v [41].

Článek dále přechází k integrální verzi Jensenovy nerovnosti, kterou lze z (3) získat limitním přechodem: Pokud $a, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou riemannovsky integrovatelné funkce, přičemž a je všude kladná, pak platí

$$\varphi\left(\frac{\int_0^1 a(x)f(x) \, dx}{\int_0^1 a(x) \, dx}\right) \leq \frac{\int_0^1 a(x)\varphi(f(x)) \, dx}{\int_0^1 a(x) \, dx}.$$

Práce [26] obsahuje i další pozoruhodné výsledky o konvexních funkcích. Například uvádí, že každá omezená konvexní funkce φ je nutně spojitá a v každém vnitřním bodě x má jednostranné derivace, přičemž platí nerovnost $\varphi'_-(x) \leq \varphi'_+(x)$.

Závěr Jensenova článku obsahuje dnes často citovaný výrok: *Zdá se mi, že pojem konvexní funkce je stejně zásadní jako pojmy kladná funkce nebo rostoucí funkce. Pokud se nemýlím, měl by tento pojem najít své místo v elementárních výkladech teorie reálných funkcí.*

Některé poznatky o konvexních funkcích se objevily již dříve. Například Jensenovu nerovnost dokázal Otto Hölder (1859–1937) v práci [24], s. 39 z roku 1889 za silnějšího předpokladu, že funkce φ má neklesající derivaci. Nerovnost (1) jako postačující podmínku pro existenci jednostranných derivací spojitě funkce zmínil Otto Stolz (1842–1905) roku 1893 v knize [47], s. 35. Teprve Jensenova práce [27] je však považována za skutečný počátek systematického studia konvexních funkcí.

Dodejme, že podle současné terminologie se funkce $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývá konvexní, pokud pro každé body $x_1, x_2 \in I$ a libovolná čísla $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ platí

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2).$$

Požaduje-li se splnění nerovnosti jen pro $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ jako u Jensena, pak se jedná o slabší podmínku, která se označuje jako J-konvexita nebo také středová konvexita (angl. „midpoint convexity“).

Zatímco J-konvexní funkce mohou být všude nespojitě, každá konvexní funkce je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu I . V této souvislosti připomeňme známý výsledek Wacława Sierpińskiego (1882–1969), který dokázal, že každá J-konvexní lebesgueovskyměřitelná funkce je nutně spojitá.

Jensenova nerovnost se často uvádí v následujícím tvaru, který zobecňuje samotnou definici konvexity na více bodů: Pro libovolné body $x_1, \dots, x_n \in I$ a čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ splňující $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ platí

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n).$$

Zájemcům o moderní teorii konvexních funkcí lze doporučit např. monografii [35].

Dalším významným výsledkem, který nese Jensenovo jméno, je vzorec vyjadřující střední hodnotu logaritmu absolutní hodnoty holomorfní funkce na kružnici. Jensen jej poprvé představil v dopise Göstovi Mittag-Lefflerovi, který jej následně publikoval v časopise *Acta Mathematica*. Proto má článek [25] formu dopisu a začíná slovy:

Pane profesore,

během Vašeho posledního pobytu v Kodani jsem měl tu čest s Vámi hovořit o určitém integrálu, který, pokud se nemýlím, hraje roli v teorii analytických funkcí. Jelikož se mi zdálo, že Vás tato otázka velmi zaujala, využívám této příležitosti – zaslání dvou malých memoárů pro Váš časopis – k tomu, abych Vám sdělil podrobnosti o své větě.

Článek má pouze šest stran a jeho hlavním výsledkem je věta z teorie funkcí komplexní proměnné. Uvažujme meromorfní funkci f definovanou v okolí kruhu $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, přičemž hodnota $f(0)$ je konečná a nenulová. V nejjednodušším případě, kdy f nemá v D_r žádné nulové body ani póly, je funkce $\log |f|$ harmonická a má vlastnost průměru:

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Jensen tuto rovnost zobecnil na případ, kdy funkce f má ve vnitřku D_r nulové body $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a póly $\beta_1, \dots, \beta_m$ (každý z nich je uveden s příslušnou násobností). Pak platí

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \frac{r^{n-m} |\beta_1| \cdot \dots \cdot |\beta_m|}{|\alpha_1| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|}.$$

Nejčastěji bývá Jensenův vzorec uváděn pro případ, kdy f je holomorfní v D_r a vzorec se zjednoduší do tvaru

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \frac{r^n}{|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|}.$$

Je pozoruhodné, jak hluboko do matematiky dokázal Jensen jako amatér (povoláním, nikoliv vzděláním) proniknout. Jeho vzorec lze využít např. k odhadu počtu kořenů holomorfní funkce ležících uvnitř daného kruhu. Jensena zajímaly též aplikace v analytické teorii čísel, avšak jeho naděje, že by tudy mohla vést cesta k řešení Riemannovy hypotézy, se bohužel ukázala lichá.

Seznam Jensenových publikací připojený k jeho nekrologu [36] čítá celkem 42 položek. Zmíníme ještě pěkný přehledový článek [28] o funkci Γ , který pro časopis *Annals of Mathematics* z dánštiny do angličtiny přeložil člen redakční rady Thomas Hakon Grönwall (1877–1932). Vlastnosti funkce Γ studoval již dříve také Niels Nielsen, o němž byla řeč v úvodu, a jak se ukáže později, šlo o téma mezi dánskými matematiky velice oblíbené.

4. Harald Bohr

Harald August Bohr (1887–1951) byl mladším bratrem fyzika a nositele Nobelovy ceny Nielse Henrika Davida Bohra (1885–1962). Jejich otec působil jako profesor fyziologie na Kodaňské univerzitě, podporoval rozvoj fotbalu v Dánsku a vedl ke sportu i své děti. Oba bratři vynikali ve fotbale už během studia na střední škole v Gammelholmu, kde byl tento sport součástí učebních osnov.

Od roku 1903 hrál Harald za *Akademisk Boldklub* a v roce 1908 byl povolán do dánské reprezentace na olympiádu v Londýně, kde se fotbal objevil poprvé jako oficiální disciplína. V semifinálovém utkání proti Francii vstřelil dvě branky a přispěl k drtivému vítězství 17 : 1. Ve finále však Dánsko podlehl Velké Británii a odvezlo si stříbrné medaile. Harald Bohr si reprezentační dres oblékl ještě jednou – v roce 1910 při historicky prvním vítězství Dánska nad Anglií 2 : 1.

Jeho sportovní úspěchy výrazně přispěly k jeho popularitě i mimo akademickou sféru. Při obhajobě jeho doktorské disertace na Kodaňské univerzitě v roce 1910 údajně dorazilo více fotbalových fanoušků než matematiků.

Jak se píše v [7]: *Vzduch hučel očekáváním, když se fotbalový tým vzrušeně nahnul do přednáškového sálu. Nejlepší záložník země se chystal obhajovat svou disertační práci z matematiky! Brzy se ukázalo, že jde o pouhou formalitu, protože kandidátova disertační práce o sčítacích metodách pro divergentní Dirichletovy řady byla mistrovským dílem.*

Harald Bohr se neúspěšně snažil o důkaz Riemannovy hypotézy, která se týká nulových bodů Riemannovy funkce ζ . Tato funkce je pro komplexní čísla s reálnou částí větší než 1 definována jako součet nekonečné řady

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

a pomocí analytického pokračování ji lze rozšířit do celé komplexní roviny. Dirichletovy řady, kterými se zabýval Bohr ve své disertaci, jsou obecnější řady ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad (4)$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních koeficientů. V porovnání například s mocninnými řadami je zkoumání konvergence Dirichletových řad náročnější. Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$ a tato konvergence je absolutní v polorovině $\operatorname{Re} s > 1$. Obecně platí, že šířka rovinného pásu, kde řada konverguje, avšak nikoliv absolutně, nemůže přesáhnout 1. Bohr se zabýval i stejnoměrnou konvergencí a ukázal, že šířka pásu, kde řada konverguje stejnoměrně, avšak nikoliv absolutně, nemůže být větší než $1/2$; podrobnější výklad k tomuto tématu lze nalézt v [7].

Bohrův hluboký zájem o analytickou teorii čísel jej v letech 1909/1910 přivedl do Göttingenu, kde navázal spolupráci s Edmundem Landauem (1877–1938). Společně dosáhli významných výsledků týkajících se nulových bodů Riemannovy funkce ζ . Bohr se rovněž spřátelil s Godfreyem Haroldem Hardym (1877–1947) a velmi dobře se znal i s Johnem Edensorem Littlewoodem (1885–1977).

Ve školním roce 1913/1914 pobýval v Oxfordu a Cambridge, a aby se důkladně seznámil s nově se rozvíjející teorií míry, odcestoval roku 1914 na několik měsíců do Paříže, kde studoval u Henriho Lebesguea (1875–1941).

V roce 1915 byl Bohr jmenován profesorem na kodaňské polytechnice. Dnes je znám především jako zakladatel matematické teorie skoroperiodických funkcí. Jeho článek [8] z roku 1925 začíná následovně: Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, řekneme, že číslo $\tau = \tau(f, \varepsilon)$ je translačním číslem (něm. *Verschiebungszahl*) funkce f vzhledem k ε , pokud platí

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f se nazývá skoroperiodická (*fast periodisch*), pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $l = l(\varepsilon) > 0$ takové, že každý interval délky l obsahuje aspoň jedno translační číslo $\tau = \tau(f, \varepsilon)$. Jinými slovy, množina translačních čísel příslušných k danému ε je nekonečná a neobsahuje libovolně dlouhé mezery.

Je zřejmé, že každá spojitá p -periodická funkce je zároveň skoroperiodická, neboť pro libovolné ε existuje nekonečně mnoho translačních čísel $\pm np$, $n \in \mathbb{N}_0$. Bohr dále ukázal, že každá skoroperiodická funkce je omezená a stejnoměrně spojitá. Třída skoroperiodických funkcí je uzavřená na základní algebraické operace: Pokud f, g jsou skoroperiodické, pak $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou rovněž skoroperiodické. V případě podílu f/g je třeba navíc předpokládat, že infimum $|g|$ je kladné. Dále platí, že stejnoměrná limita skoroperiodických funkcí je skoroperiodická.

Jednoduchým příkladem funkce, která je skoroperiodická, avšak nikoliv periodická, je $f(x) = \sin x + \sin(px)$, kde p je iracionální číslo. Rovněž každá funkce tvaru

$$\sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x},$$

kde $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, je skoroperiodická; tyto funkce se nazývají trigonometrické polynomy. Bohr si kladl za cíl zobecnit některé známé výsledky teorie Fourierových řad na širší třídu skoroperiodických funkcí. K jeho hlavním výsledkům patří následující tvrzení:

- Ke každé skoroperiodické funkci f existují reálná posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a komplexní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| f(x) - \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x} \right|^2 dx \right) = 0.$$

- Funkce f je skoroperiodická, právě když ji lze stejnoměrně aproximovat trigonometrickými polynomy, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje trigonometrický polynom P_ε takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Bohr uvádí, že podobnými otázkami se již dříve zabýval litevský matematik Piers Bohl (1865–1921) ve své magisterské práci. Ten mimo jiné úspěšně vyřešil následující problém: Jsou dána kladná čísla $k_1, \dots, k_q$ a úkolem je popsat třídu spojitých funkcí, které lze stejnoměrně aproximovat trigonometrickými polynomy tvaru

$$\sum_{n=1}^N b_n e^{i(n_1 k_1 + \dots + n_q k_q)x}.$$

Více o životě a matematickém odkazu Pierse Bohla lze nalézt v [1].

Vraťme se však k Haraldovi Bohrovi. Jak vlastně ke skoroperiodickým funkcím dospěl? Jak uvádí nekrolog [51], tato tematika úzce souvisí s jeho zájmem o Dirichletovy řady. Funkce ve tvaru (4) lze dále zobecnit a uvažovat Dirichletovy řady typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (5)$$

kde $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Při volbě $\lambda_n = \log n$ získáme klasickou Dirichletovu řadu (4), zatímco pro $\lambda_n = n$ jde o řadu mocninnou.

Bohr se zabýval otázkou, jaké funkce lze vyjádřit ve tvaru (5). Pokud se omezíme na přímku $s = it$, dostáváme právě skoroperiodické funkce.

Bohr svou teorii dále rozvinul ve dvou bezprostředně navazujících článcích [9], [10], v nichž mimo jiné zavedl pojem skoroperiodických funkcí komplexní proměnné. Tématu se pak věnoval i v dalších pozdějších pracích. Jeho kniha [11] z roku 1932 vyšla v roce 1947 v anglickém překladu a dočkala se dvou reedic – v roce 1974 v němčině a v roce 2018 v angličtině.

Téma skoroperiodických funkcí se ukázalo jako mimořádně plodné a teorie se dále úspěšně rozvíjela. V dvacátých a třicátých letech 20. století k tomu přispěla řada matematiků – mimo jiné Abram Samojlovič Bezikovič (1891–1970), Vjačeslav Vasiljevič Stěpanov (1889–1950), Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955), John von Neumann (1903–1957), Alan Mathison Turing (1912–1954) a Salomon Bochner (1899–1982). Například v Bochnerově práci [12] z roku 1927 najdeme mimo jiné následující tvrzení, které je považováno za ekvivalentní definici skoroperiodické funkce: Spojitá funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je skoroperiodická, právě když pro každou reálnou posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje podposloupnost $\{T_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že posloupnost funkcí $\{f(t + T_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. Další informace o teorii skoroperiodických funkcí lze nalézt například v bakalářské práci [53].

V období 1926–1929 působil Bohr jako předseda DMS a tuto funkci pak zastával znovu v letech 1937–1951. Roku 1930 získal místo na Kodaňské univerzitě a zároveň se stal hostujícím profesorem na Stanfordově univerzitě v USA.

Po nástupu nacismu v Německu roku 1933 se Bohr otevřeně postavil proti antisemitským postojům některých německých matematiků, zejména Ludwiga Bieberbacha (1886–1982). V následujících letech se aktivně angažoval v pomoci těm, kdo byli nuceni emigrovat – díky svým kontaktům pomáhal ohroženým matematikům najít nová akademická působiště. Podrobnosti o této činnosti lze nalézt v [44].

V září 1943 se bratři Bohrové dozvěděli, že jsou kvůli původu své matky nacisty považováni za Židy a že jim hrozí zatčení. Díky pomoci dánského odboje se jim podařilo uprchnout do neutrálního Švédska. Stejným způsobem se podařilo zachránit naprostou většinu dánských Židů – více než 7 000 osob bylo během několika týdnů přepraveno přes moře pomocí rybářských a motorových člunů. Menší část židovského obyvatelstva však skončila v terezínském ghettu.

Po skončení druhé světové války se Bohr vrátil do Kodaně a v létě roku 1948 pobýval v *Institute for Advanced Study* v Princetonu. Přestože se jeho zdravotní stav od roku 1950 začal zhoršovat, zúčastnil se ještě Mezinárodního kongresu matematiků v Cambridge (Massachusetts). Po operaci na počátku roku 1951 však zemřel.

Na Bohra vzpomínala řada významných matematiků. Nejpodrobnější nekrolog je uveden v [29], kde je rovněž seznam jeho publikací (sebrané spisy Haralda Bohra vyšly v roce 1952). Za pozornost stojí také nekrology [13], [51] a vzpomínkový text Bezikoviče [5] publikovaný v New York Times, kde je Harald Bohr popsán těmito slovy: *Po většinu svého života byl Bohr nemocný. Trpěl silnými bolestmi hlavy a musel se vyhýbat veškeré duševní námaze. Bohr jako člověk nebyl o nic méně pozoruhodný než Bohr jako matematik. Byl to muž s vytríbeným intelektem harmonicky rozvinutým v mnoha směrech. Byl také nesmírně lidský. Jeho pomoc žákům, kolegům a přátelům i uprchlíkům z akademického světa byla skutku velkorysá. Jakmile se jednou rozhodl pomoci, nezastavil se před ničím a jen zřídka neuspěl. Měl blízký vztah k literatuře. Jeho oblíbeným autorem byl Dickens: Choval hluboký obdiv k Dickensově lásce k člověku a hluboce oceňoval jeho humor.*

5. Johannes Møllerup a Aksel Andersen

Jméno Haralda Bohra je též spojeno se známou Bohrovou–Møllerupovou větou. Ta se týká se funkce Γ , která je definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (6)$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, a protože $\Gamma(1) = 1$, dostáváme $\Gamma(n+1) = n!$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Funkcí, které mají tyto vlastnosti, tj. interpolují hodnoty faktoriálů, je nekonečně mnoho. Ani požadavek, aby rovnost $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ platila pro každé $x > 0$, neurčuje funkci jednoznačně. Bylo proto přirozené hledat další podmínku, která by již jednoznačně vedla ke vztahu (6). Ačkoliv bylo navrženo několik různých více či méně přirozených charakterizací, za nejelegantnější bývá považována právě Bohrova–Møllerupova věta. Podle této věty je Γ jedinou kladnou funkcí $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje následující tři podmínky:

- $f(x+1) = xf(x)$ pro každé $x > 0$,
- $f(1) = 1$,
- $\log f$ je konvexní funkce.

Podrobnosti o historii funkce Γ a Bohrově–Møllerupově větě lze nalézt v [15], [52].

Johannes Peter Mollerup (1872–1937) vystudoval matematiku na Kodaňské univerzitě, kterou absolvoval v roce 1893. Jeho zájem se brzy zaměřil na geometrii, v jejímž studiu dále pokračoval. Roku 1903 získal doktorát za disertační práci věnovanou axiomatickým základům rovinné geometrie. Od roku 1916 až do konce života působil jako profesor na kodaňské technice. V letech 1917–1926 zastával funkci předsedy DMS, v jejímž čele jej poté vystřídal Harald Bohr.

Mollerup i Bohr na polytechnice vyučovali matematickou analýzu a za tímto účelem v letech 1915–1918 společně sepsali novou čtyřsvazkovou učebnici *Lærebog i matematisk Analyse*. Ta na dlouhá léta velmi podstatně ovlivnila způsob výuky analýzy na kodaňské polytechnice i univerzitě.

Právě ve třetím díle [34] této učebnice byla poprvé zformulována Bohrova–Mollerupova věta. Autoři svůj výsledek nepovažovali za nový, a proto jej neuveřejnili v žádném odborném časopise. Věta se do širšího povědomí dostala až později díky Emilu Artinovi (1898–1962), který ji zařadil do své knihy [2] o funkci Γ , kde zároveň předložil její zjednodušený důkaz.

Po smrti Johanna Mollerupa došlo k přepracování učebnice *Lærebog i matematisk Analyse*. Nové vydání odráželo změny v osnovách a zachovalo sice původní název, avšak jako Bohrovi spoluautoři byli uvedeni Aksel Frederik Andersen (1891–1972) a Richard Petersen (1894–1968). Jak uvádí [45], Andersenův důraz na přesnost při revizi textu byl místy vnímán jako až přehnaně pedantický, a občas téměř kontraproduktivní. Dochoval se Bohrův dopis, ve kterém s lehkou ironií píše: *Mám pocit, že Petersen – jehož pracovní podíl činil 99 % + 6 % mé pomoci – 5 % Andersenovy anti-pomoci – si za svůj dlouhý zápas s touto knihou zaslouží uznání.*

Andersen studoval od roku 1909 matematiku na Kodaňské univerzitě, kde v roce 1915 získal magisterský titul. Matematika jej zajímala už od raného mládí; během studií získal zlatou medaili univerzity za řešení soutěžní úlohy o chování mocninných řad na konvergenční kružnici. Roku 1916 nastoupil jako asistent na kodaňskou polytechniku a v roce 1922 získal doktorát za práci věnovanou cesářovské sčítatelnosti nekonečných řad. Téma jeho disertační práce odráželo zaměření skupiny kolem Harald Bohra a Nielse Erika Nørlunda (1885–1981), matematika a astronoma, který byl v letech 1933–1934 rektorem Kodaňské univerzity. Nekonečné řady, sčítatelnost a teorie funkcí komplexní proměnné zůstaly hlavními oblastmi Andersenova výzkumu po celý jeho profesní život.

Andersen byl rovněž aktivním členem DMS. Pronesl řadu přednášek (některé byly později vydány tiskem), několik let působil jako její tajemník a podílel se na organizaci skandinávských matematických kongresů. V roce 1932 se zúčastnil Mezinárodního kongresu matematiků v Curychu.

Z textu [45] se také dozvídáme, že Andersen se dlouhodobě a intenzivně zajímal o výuku matematiky na středních školách. V letech 1912–1934 zde dokonce sám vyučoval. Spolupracoval na tvorbě čtyřdílné řady středoškolských učebnic *Lærebog i matematik for gymnasiet*s matematick-naturvidenskabelige linje, které byly oceňovány pro svou srozumitelnost i přesto, že pracovaly s rozvoji elementárních funkcí do nekonečných řad. Andersen se zároveň stavěl kriticky k axiomatickému přístupu ve výuce středoškolské matematiky a zdůrazňoval význam geometrické intuice. Svými aktivitami měl v období 1930–1960 zásadní vliv na podobu výuky matematiky v Dánsku.

6. Julius Pal

Uděláme krátkou, ale snad zajímavou odbočku. Maďarsko-dánský matematik Gyula Perl (1881–1946) se narodil v židovské rodině v Gyóru. V roce 1909 si „pomadařstil“ příjmení na Pál a zároveň se stal římským katolíkem. Navštěvoval benediktinskou základní školu, kde se spřátelil s pozdějšími významnými matematiky, bratry Frigyesem Rieszem (1880–1956) a Marcelem Rieszem (1886–1969), s nimiž zůstal v kontaktu i později. Ve studiu pokračoval na univerzitě v Budapešti, kterou dokončil až v roce 1908. Mezitím pobýval nějaký čas v Göttingenu u Constantina Carathéodoryho (1873–1950), dále v Mnichově a v Paříži. Roku 1908 začal učit na střední škole, přitom se však dále věnoval studiu pod vedením Marcela Riesze a roku 1916 získal doktorát na univerzitě v Kolozsváru.

Za první světové války narukoval jako dobrovolník, byl zraněn a následky zranění mu komplikovaly život i později. V roce 1919 krátce působil jako učitel na gymnáziu v tehdy ještě maďarské Bratislavě (Pozsony), která však brzy připadla Československu. Pál přišel o místo, rozhodl se emigrovat a přijal pozvání Haralda Bohra do Kodaně. K Dánsku měl vztah už z předválečné doby, kdy zde plánoval sňatek, který se však neuskutečnil. S Bohrem se blíže seznámil v Paříži, kde společně studovali Lebesgueův integrál. Kromě Bohra mu pomáhal i Mollerup.

V Dánsku začal používat jméno Julius Pal. Nejprve působil jako středoškolský učitel, jehož studenti si jej pamatovali jako přísného, ale výborného pedagoga. V roce 1925 získal místo Bohrova asistenta na kodaňské polytechnice, kde vyučoval především matematickou analýzu. Roku 1929 byl jmenován docentem – k tomu bylo zapotřebí dánské občanství, které získal v předchozím roce. V letech 1932–1938 působil rovněž jako Bohrův asistent na univerzitě.

Během druhé světové války se navzdory chatrnému zdraví zapojil do odboje. Získal falešný rodný list s pomadařštěnou verzí příjmení Pál, který dokládal jeho římskokatolické vyznání – tento dokument jej ochránil před nacistickým pronásledováním. Tragické zprávy o osudu jeho maďarských příbuzných však pravděpodobně výrazně podlomily jeho zdraví a v srpnu 1946 zemřel.

Zmíníme aspoň dva pozoruhodné výsledky Julia Pala. První souvisí s tzv. Kakeyovým problémem, který v roce 1917 zformuloval japonský matematik Sōichi Kakeya (1886–1947). Úkolem je nalézt nejmenší konvexní útvar v rovině, uvnitř něhož lze otočit jehlu jednotkové délky o 180 stupňů. Pokud bychom jehlu otáčeli kolem jejího středu, potřebovali bychom kruh o obsahu $\pi/4$. Lepší řešení představuje rovnostranný trojúhelník o straně délky $2/\sqrt{3}$, jehož výška je rovna jedné a obsah činí $1/\sqrt{3}$. Jehlu zabodneme do jednoho vrcholu, otočíme o 60 stupňů a obdobným způsobem pokračujeme u dalších dvou vrcholů. Pal ve své práci [38] dokázal, že toto řešení je mezi konvexními útvary optimální. Později byla úloha zobecněna i na nekonvexní útvary a objevila se hypotéza, že nejlepším řešením je deltoida o obsahu $\pi/8$. V roce 1927 však přišel A. S. Bezikovič s překvapivým objevem: v obecném případě Kakeyův problém nemá žádné optimální řešení, neboť jehlu lze otočit v útvaru s libovolně malým obsahem.

Druhý výsledek je variantou známé Weierstrassovy věty, která říká, že každou spojitou funkci lze na uzavřeném intervalu s libovolnou přesností aproximovat polynomem. Pal dokázal [37], že u aproximujícího polynomu lze předem zvolit koeficienty u něko-

lika prvních mocnin (kromě konstantního členu): *Nechť $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ a každou volbu $a_1, \dots, a_n$ existuje polynom tvaru $P(x) = f(0) + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ takový, že $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [-1, 1]$.* Více informací o Palovi lze nalézt v článku [19].

7. Børge Jessen

Børge Christian Jessen (1907–1993) byl v letech 1954–1958 šestým doloženým předsedou DMS. Podrobný životopis je k dispozici v článku [3], jehož autorem je Jessenův žák Christian Berg (*1944).

Na gymnáziu v Kodani byl Jessenovým učitelem matematiky Julius Pal, který mu doporučil dříve zmíněnou učebnici matematické analýzy od Mollerupa a Bohra. Jessen se s náročnou četbou úspěšně vypořádal a díky tomu mohl po nástupu na Kodaňskou univerzitu v roce 1925 přeskočit některé úvodní kurzy. Velice jej zaujaly Bohrovy přednášky z teorie čísel a z komplexní analýzy. Současně se věnoval i samostatnému studiu reálné analýzy z knih René-Louise Baira, Henri Lebesguea, Charlese de la Vallée Poussina a Constantina Carathéodoryho. Harald Bohr si povšiml Jessenova talentu a přizval jej ke spolupráci na výzkumu o Riemannově funkci ζ , která vyústila ve společný článek publikovaný roku 1929. Ve stejném roce Jessen obhájil svou magisterskou práci věnovanou skoroperiodickým funkcím.

Následně získal stipendium od nadace Carlsberg³, které mu umožnilo dvouměsíční pobyt v maďarském Szegedu, kde navázal kontakty s Frigyesem Rieszem, Alfrédem Haarem a Lipótem Fejérem. V akademickém roce 1929/30 pak pobýval v Göttingenu, kde navštěvoval přednášky Davida Hilberta (1862–1943) a Edmunda Landaua. V květnu 1930 úspěšně obhájil doktorskou disertaci věnovanou teorii integrálu.

V letech 1930–1935 působil Jessen jako docent na kodaňské Královské veterinární a zemědělské univerzitě. Díky podpoře Rockefellerovy nadace se však v období od dubna 1933 do května 1934 opět vydal na cesty. Nejprve zavítal do Cambridge, kde se setkal Hardym, Bezikovičem, Youngem a Birkhoffem. Poté s manželkou odcestoval do USA, kde navštívili Princeton, Yale a také Harvard a Brown University.

V letech 1935–1942 zastával pozici profesora geometrie na kodaňské polytechnice, poté až do svého odchodu do důchodu v roce 1977 působil na Kodaňské univerzitě. V období 1948–1967 zde vedl katedru matematiky.

Jessenovy schopnosti a organizační dovednosti mu přinášely další funkce, často spojené s množstvím administrativní agendy. V roce 1939 byl zvolen členem Královské dánské akademie věd a literatury. Klíčovou roli sehrál při přípravách vzniku Institutu Hanse Christiana Ørstedta pro matematiku, fyziku a chemii, který byl založen v roce 1963. Jednou z nejnáročnějších funkcí bylo jeho působení ve správní radě nadace Carlsberg, do níž byl zvolen v roce 1950. V letech 1955–1963 stál v jejím čele jako předseda.

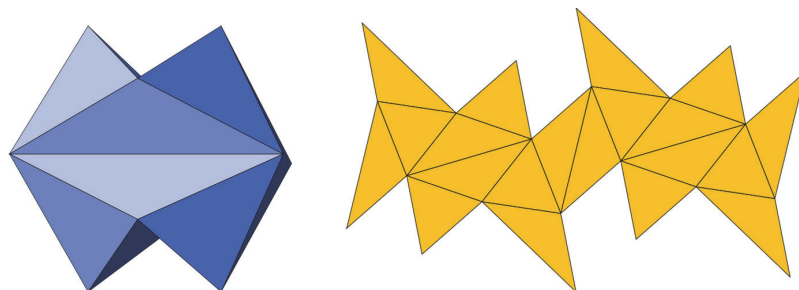
V letech 1935–1949 působil Jessen jako editor časopisu *Matematisk Tidsskrift B* a v období 1948 až 1988 byl členem redakční rady časopisu *Acta Mathematica*. Sou-

³Soukromou nadací zaměřenou na podporu umění a věd založil v roce 1876 pivovárník a filantrop Jacob Christian Jacobsen (1811–1887). V současnosti je úzce propojena s Královskou dánskou akademií věd a literatury, obě instituce sídlí ve stejné budově.

časně se výrazně angažoval v činnosti DMS, kde v letech 1930–1942 zastával funkci tajemníka, od roku 1952 byl členem předsednictva a v období 1954–1958 předsedou.

Všechny tyto časově náročné závazky se podepsaly na jeho vědecké činnosti – po roce 1952 publikoval již jen minimálně. Výjimku představuje článek věnovaný skoro-periodickým funkcím [30], který vychází z jeho plenární přednášky na Mezinárodním kongresu matematiků v Amsterdamu v roce 1954.

Až v roce 1967 publikoval Jessen další článek [31], který svědčí o jeho trvalém zájmu o geometrii. Popsal v něm pozoruhodné těleso znázorněné na obr. 2, které bylo na jeho počest pojmenováno Jessenův dvacetistěn. Je známo, že existuje právě pět pravidelných konvexních mnohostěnů – čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Pravidelný konvexní dvacetistěn má 20 trojúhelníkových stěn, 12 vrcholů a 30 hran. Totéž platí i pro Jessenův dvacetistěn – avšak s tím rozdílem, že není konvexní, nýbrž pouze hvězdicově konvexní. Stěny tělesa tvoří osm navzájem shodných rovnostranných trojúhelníků a dvanáct shodných rovnoramenných trojúhelníků. Úhly mezi sousedními stěnami jsou vždy pravé.



Obr. 2. Jessenův dvacetistěn a jeho síť
(zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Jessen's_icosahedron)

Jessenovy práce jsou vesměs technicky náročné, proto se jim nebudeme podrobněji věnovat. Jejich soupis lze najít v nekrologu [3], z něhož uvedeme několik vybraných pasáží. Některé z nich mohou čtenáři připomenout pedagogické působení nám dobře známého Vojtěcha Jarníka (1897–1970)⁴:

Roku 1960 se změnil obsah univerzitní přednášky z matematiky. Jessen vyučoval analýzu ve druhém ročníku. Přednáška zahrnovala základní poznatky o Fourierových řadách, Lebesgueově integrálu a komplexní analýze, avšak Jessen rád zařazoval i další témata jako např. Weierstrassovu větu o aproximaci, popis Peanovy křivky nebo Weierstrassovy spojité nediferencovatelné funkce. Přednášky měl velmi dobře připravené a tabuli využíval efektivním způsobem, od levého horního rohu až po pravý dolní roh. Složitě obrázky měl často nakreslené předem a schované za jinou tabulí, a již napsané vzorce upravoval barevnou křídou, aby ušetřil psaní...

⁴Jarník i Jessen pobývali jistý čas v Göttingenu, kde byli silně ovlivněni Edmundem Landauem. Harald Bohr o něm napsal: *Silný dojem udělal Landau na každého, kdo s ním přišel do styku. Jeho barokní smysl pro humor a výjimečná vitalita charakterizovaly jak jeho vědecký výzkum, tak i jeho výuku. Jeho myšlení bylo úžasně rychlé a přesné a jeho nároky na přesnost a preciznost výkladu byly absolutní a nezpochybnitelné.*

... a po přednášce měl člověk dojem, že vše je snadné a elegantní. Jessen také rád uváděl drobné anekdoty o autorech některých tvrzení, a během přednášek často nechával kolovat knihy z knihovny, takže jsme si mohli prohlédnout portrét slavného matematika nebo klasickou matematickou práci. Když přednášel o konvexitě a Jensenově nerovnosti, žertem říkával, že existují dva matematici se jménem Jensen – autor vzorce, slavný telefonní inženýr, a on sám, když je jeho jméno chybně napsáno.⁵ O [svém spoluautorovi] Wintnerovi nám řekl, že jeho jméno je užito pro fyzikální jednotku: „Jeden wintner je 100 cigaret denně...“

Řekl nám také, že má ve zvyku vyhazovat řešení cvičení, aby je každý rok musel dělat znova – tímto způsobem si uchovával znalost jejich obtížnosti. Při závěrečné zkoušce byl Jessen studentům pokaždé velmi nakloněn. Velmi rád citoval Bohra, který prý řekl, že je třeba vždy dát studentům konečnou známku o něco lepší než jakou mohou očekávat. Díky tomu pak vzpomínají na svá studijní léta s radostí.

Jessen byl všeobecně považován za vynikajícího přednášejícího. Například Paul Halmos (1916–2006) ve své knize [21] ocenil jeho *úžasně jasný a krásně uspořádaný výklad*.

Závěr Jessenova života byl poznamenán ztrátou manželky a zhoršující se Parkinsonovou chorobou. Poslední léta strávil v domově důchodců, kde mu postupně se zhoršující zrak i sluch znemožnily se věnovat činnostem, které miloval – četbě a poslechu hudby. Většina jeho rozsáhlé matematické knihovny se nyní nachází na katedře matematiky na univerzitě v Aalborgu.

8. Werner Fenchel

Německo-dánský matematik Moritz Werner Fenchel (1905–1988) zastával funkci předsedy DMS v letech 1958–1962. Jeho život byl plný zvratů a kontrastů. Narodil se v Berlíně, kde v letech 1923–1928 vystudoval matematiku a fyziku na tamní univerzitě. Doktorskou práci věnovanou geometrii uzavřených prostorových křivek vypracoval pod vedením Ludwiga Bieberbacha. O několik let později by to nebylo možné, neboť Fenchel byl židovského původu, zatímco Bieberbach se stal aktivním a zřejmě i přesvědčeným nacistou.

Vybrané výsledky Fenchelovy disertace byly publikovány v článku [17]. Objevuje se v něm i známá věta nesoucí Fenchelovo jméno, jedno ze základních tvrzení globální diferenciální geometrie křivek: *Je-li $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzavřená parametrizovaná křivka, pak její celková křivost je aspoň 2π , přičemž rovnost nastává právě tehdy, když se jedná o rovinnou konvexní křivku*. Připomeňme, že pokud je křivka parametrizována obloukem (tj. jednotkovou rychlostí, což můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat), pak její celková křivost je definována jako integrál z „obyčejné“ křivosti, tj. $\int_a^b \kappa(s) ds$. První část věty tedy říká, že průměrná křivost uzavřené prostorové křivky délky L je aspoň $2\pi/L$. Později István Fáry (1922–1984) a John Milnor (*1931) dokázali, že pro zauzlovanou uzavřenou křivku (tj. takovou, která není izotopická s kružnicí) je celková

⁵Jako kuriozitu doplníme skutečnost, že existuje Jessenova nerovnost, která je zobecněním Jensenovy nerovnosti.

křivost aspoň 4π . Poměrně přístupné důkazy Fenchelovy i Fáryho–Milnorovy věty lze najít v učebnicích diferenciální geometrie jako např. [16], [49].

Po dokončení doktorátu se Fenchel stal Landauovým asistentem na göttingenské univerzitě. Podle [33] šlo o časově velmi náročnou práci. Fenchel musel navštěvovat všechny Landauovy přednášky a okamžitě upozorňovat na případné chyby, pomáhat mu s vyřizováním korespondence a slovo za slovem procházet rukopisy přednášek, které si Landau připravoval. Richard Courant (1888–1972) a Otto Eduard Neugebauer (1899–1990) dospěli k názoru, že Fenchel potřebuje více prostoru pro vlastní vědeckou činnost, a pomohli mu získat podporu Rockefellerovy nadace. Díky ní mohl cestovat – navštívil Řím, kde se setkal s Tulliem Levi-Civitou (1873–1941), a také Kodaně, kde navázal kontakt s Haraldem Bohrem, Børgem Jessenem a Tommy Bonnesenem (1873–1935).

Právě Neugebauer údajně navrhl, aby Fenchel s Bonnesenem společně sepsali pojednání o konvexitě. Tak vznikla klasická monografie *Theorie der konvexen Körper* [14] z roku 1934, která se později dočkala i anglického překladu a stala se standardním referenčním zdrojem informací o konvexitě. Fenchel později uvedl, že se s Bonnesenem výborně doplňovali. Sám si vzal za úkol prostudovat veškerou relevantní literaturu ve vynikající göttingenské knihovně. Na jaře 1932 se vrátil do Kodaně, kde začali společně pracovat na knize, a později téhož roku přijel Bonnesen do Göttingenu. Ale pak přišla nacistická éra.

V roce 1933 byl Fenchel z göttingenské univerzity propuštěn na základě zákona o obnově státní služby, namířeného proti neárijským pracovníkům. Odešel do Dánska, stejně jako jeho budoucí manželka, matematicka Käte Sperling (1905–1983); vzali se v prosinci 1933. Zpočátku žil Fenchel z podpory různých nadací, od roku 1938 začal učit, a od roku 1942 působil jako přednášející na univerzitě v Kodani. Od roku 1940 Němci okupovali Dánsko. Deportace Židů započaly v říjnu 1943, a tak bylo nutné znovu prchat. Stejně jako Harald Bohr pak Fenchelovi působili do konce války na dánské škole ve švédském Lundu, která fungovala po dobu 19 měsíců.

V roce 1946 byl Fenchel zvolen členem Královské dánské akademie věd a literatury. Nejprve působil na polytechnice v Kodani, v letech 1949–1951 přednášel v USA na Univerzitě Jižní Kalifornie, na Stanfordově univerzitě a na univerzitě v Princetonu. Cyklostylované zápisky jeho přednášek o konvexitě proslovené v Princetonu kolovaly mezi matematiky a významně ovlivnily další vývoj této oblasti.

Po návratu do Dánska se Fenchel v letech 1952–1956 stal profesorem mechaniky na kodaňské polytechnice a poté až do roku 1974 působil jako profesor matematiky na Kodaňské univerzitě. Velká část jeho vědecké práce je věnována konvexitě a s ní souvisejícím otázkám, např. dualitě, problémům optimalizace a nelineárnímu programování. Sepsal též velmi pěkné pojednání o historii konvexity [18]. Více o Fenchelovi a jeho matematice lze nalézt v [32], [33].

9. Piet Hein

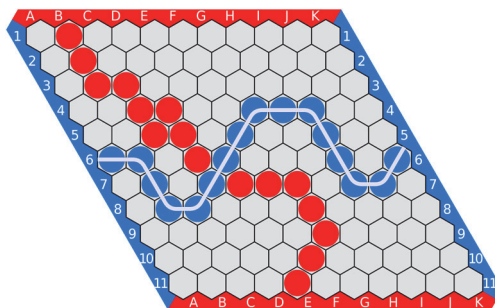
Na webové stránce [50] je uveden žebříček osmi nejpopulárnějších dánských matematiků, přičemž jako měřítko posloužil údaj, jak často uživatelé vyhledávají jejich životopisy: Harald Bohr, Piet Hein, Jørgen Mohr, Johan Jensen, Agner Erlang, Julius Petersen, Jørgen Gram a Poul Heegard.

Abychom potěšili čtenáře se zájmem o rekreační matematiku, zmíníme se krátce o Pietu Heinovi (1905–1996). Tento absolvent kodaňské univerzity a polytechniky byl nejen matematikem, ale též vynálezcem, výtvarníkem, spisovatelem a básníkem. V poezii se proslavil především svými krátkými verši, známými jako *grooks* (v dánštině *gruk*), které se vyznačují inteligencí, jemnou ironií, kreativitou a schopností nahlížet svět z nečekaných úhlů. Často obsahují i skrytý podtext. Pod pseudonymem je začal psát během německé okupace Dánska a za celý život jich vytvořil více než sedm tisíc. Uvedme aspoň jednu ukázkou:

*The road to wisdom? – / Well, it's plain / and simple to express: /Err /and
err /and err again /but less /and less /and less*

V matematické komunitě je Piet Hein znám mimo jiné jako vynálezce deskové hry pro dva hráče s názvem *Hex* [22], [23]. Herní plán tvoří síť 11×11 šestiúhelníkových políček, viz obr. 3, přičemž každému hráči přísluší dvě protilehlé strany. Hráči se střídají v obsazování volných políček a cílem každého z nich je spojit své dvě strany souvislým řetězcem – podobně jako ve známé televizní soutěži *AZ-kvíz*.

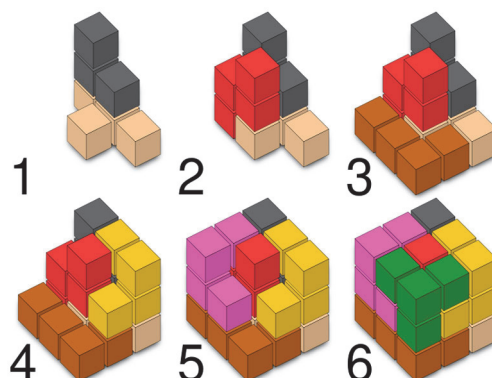
Hein navrhl tuto hru v roce 1942. Později ji znovuobjevil a výrazně zpopularizoval slavný matematik John Nash (1928–2015). Existují i varianty s odlišnými velikostmi herního plánu. Pro jakoukoliv velikost $n \times n$ však platí, že hra nemůže skončit remízou, a navíc – při optimální hře – má první hráč vždy vítěznou strategii. V průběhu času se ukázalo, že *Hex* má i nečekané souvislosti se „seriózní“ matematikou – například s důkazem Brouwerovy věty o existenci pevného bodu [20].



Obr. 3. Ukončená partie Heinovy hry *Hex*
(zdroj: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_\(board_game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)))

Dalším z Heinových oblíbených vynálezů je hlavolam *Soma* z roku 1933. Tvoří jej sedm nekonvexních polykrychlí – těles sestavených z několika jednotkových krychlí – z nichž je potřeba složit krychlí o rozměrech $3 \times 3 \times 3$. Úkol přitom není tak jednoduchý, jak se na první pohled může zdát. Řešení není určeno jednoznačně: Matematikové zjistili, že hra má celkem 240 různých řešení [4].

Hein se proslavil také svými architektonickými návrhy, v nichž s oblibou využíval tzv. superelipsy a supervejce (viz např. [46]). Všechna výše uvedená témata ve svých sloupcích pomohl zpopularizovat legendární Martin Gardner (1914–2010).



Obr. 4. Jedno z řešení hlavolamu *Soma*
(zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Soma_cube)

10. Závěr

Přednášky špičkových světových matematiků v Kodani nejsou výjimkou – konají se v rámci prestižní série *Harald Bohr Lectures*, která vzdává hold odkazu Haralda Bohra jako významného matematika a vášnivého popularizátora oboru.⁶ Tyto přednášky se konají dvakrát až třikrát do roka a kromě odborné náplně mívají i společenský rozměr.

V minulých letech v rámci této série vystoupili např. László Lovász (*1948), Jakov Grigorjevič Sinaj (*1935), Avi Wigderson (*1956) či Andrew Wiles (*1953).⁷ Již nyní je známo, že na jaře 2026 bude v Kodani přednášet Ingrid Daubechies (*1954), která se proslavila pracemi v oblasti waveletů a v letech 2011–2014 byla první ženou v čele Mezinárodní matematické unie.

V Dánsku přibývá akcí zaměřených na podporu žen v matematice. Patří sem konference a iniciativy, které oceňují přínos matematicek a usilují o vytváření příznivého prostředí pro jejich profesní rozvoj. Klíčový je *Mezinárodní den žen v matematice*, který se koná vždy 12. května. V souvislosti s tím se letos 8. a 9. května na univerzitě v Aalborgu uskutečnila již čtvrtá konference věnovaná uplatnění žen v matematice.

První ženou, která zastávala funkci předsedkyně DMS, byla Bodil Branner (*1943), a to v letech 1998–2002. Patří mezi zakladatelky organizace *European Women in Mathematics*, která je inspirována podobnou zámořskou institucí *Association for Women in Mathematics*. Branner iniciovala vznik dánského matematického zpravodaje *Matilde* a usilovala o rozšíření aktivit společnosti po celém Dánsku pořádáním výročních setkání na různých univerzitách. Pro zajímavost ještě zmíníme, že současnou prezidentkou Královské dánské akademie je profesorka statistiky z katedry matematiky Kodaňské univerzity Susanne Ditlevsen (*1965).

Dánové kladou velký důraz na podporu mládeže v přírodních vědách a matematice, například prostřednictvím kvalitně organizovaných a oceňovaných soutěží.

⁶Odkazu Haralda Bohra si Kodaňská univerzita cení i tím, že každoročně uděluje cenu Harald za nejvíce inspirující semestrální přednášky svých vyučujících. Laureát obdrží porcelánovou sošku sovy a odměnu 25 tisíc dánských korun.

⁷Viz <https://www.math.ku.dk/english/outreach/bohr-lectures/>

O významné pozici dánské matematiky v evropském kontextu svědčí i fakt, že současným prezidentem Evropské matematické společnosti je Jan Philip Solovej (*1961), profesor matematické fyziky na Kodaňské univerzitě. V květnu 2025 získal prestižní *Villum Investigator grant* na období 2026–2031 v hodnotě 30 milionů dánských korun, což je při současném kurzu cca 100 milionů Kč. Šíře jeho odborných zájmů je obdivuhodná – kromě řady témat z matematické fyziky zahrnují také spektrální teorii, variační metody a parciální diferenciální rovnice.

Dánsko si i přes svoji relativně malou velikost vybudovalo pevné místo na mapě světové matematiky. Silná tradice výzkumu, vzdělávání a popularizace matematiky se zde setkává s otevřeností vůči novým přístupům a inovacím. Díky významným osobnostem a podpoře mladých talentů a žen v matematice zůstává dánská matematická scéna živá a inspirativní.

L i t e r a t u r a

- [1] ANDRES, J., ČERMÁK, J., FEDORKOVÁ, L.: *Piers Bohl stále inspirující*. PMFA 69 (2024), 133–152.
- [2] ARTIN, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*. B.G. Teubner, Leipzig, 1931. Anglický překlad: *The gamma function*. Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [3] BERG, CH.: *Børge Jessen, 19. 6. 1907–20. 3. 1993*. J. Électron. Hist. Probab. Stat. 5 (2009). Dostupné z: <https://www.jehps.net/juin2009/Berg.pdf>
- [4] BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K.: *Winning ways for your mathematical plays, Vol. 4*. 2nd edition, A K Peters, 2004.
- [5] BESICOVITCH, A. S.: *Prof. Harald Bohr. A notable Danish mathematician*. New York Times, January 23, 1951. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/TimesObituaries/Bohr_Harald/
- [6] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K., WILSON, R. J.: *Graph theory 1736–1936*. Oxford University Press, 1998.
- [7] BOAS, H. P.: *The football player and the infinite series*. Notices Amer. Math. Soc. 44 (1997), 1430–1435.
- [8] BOHR, H.: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Eine Verallgemeinerung der Theorie der Fourierreihen*. Acta Math. 45 (1925), 29–127.
- [9] BOHR, H.: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variablen; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen*. Acta Math. 46 (1925), 101–214.
- [10] BOHR, H.: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen*. Acta Math. 47 (1926), 237–281.
- [11] BOHR, H.: *Fastperiodische Funktionen*. Springer, 1932.
- [12] BOCHNER, S.: *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Teil. Funktionen einer Variablen*. Math. Ann. 96 (1927), 119–147.
- [13] BOCHNER, S.: *Harald Bohr. April 22, 1887–January 22, 1951*. Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 72–75.
- [14] BONNESEN, T., FENCHEL, W.: *Theorie der konvexen Körper*. Springer, 1934. Anglický překlad: *Theory of convex bodies*. BCS Associates, 1987.

- [15] DAVIS, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function*. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.
- [16] DO CARMO, M. P.: *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [17] FENCHEL, W.: *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*. Math. Ann. 101 (1929), 238–252.
- [18] FENCHEL, W.: *Convexity through the ages*. In: P. M. Gruber, J. M. Wills (eds.): *Convexity and its applications*, Springer, 1983, 120–130.
- [19] FILEP, L., ELKJÆR, S.: *Erratum to the paper: Pál Gyula – Julius Pal (1881–1946), the Hungarian-Danish mathematician*. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi 17 (2001), 31–36.
- [20] GALE, D.: *The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem*. Amer. Math. Monthly 86 (1979), 818–827.
- [21] HALMOS, P. R.: *I want to be a mathematician: an automathography in three parts*. Mathematical Association of America, 1965.
- [22] HAYWARD, R. B.: *Hex. A playful introduction*. MAA Press, 2022.
- [23] HAYWARD, R. B., TOFT, B.: *Hex. The full story*. CRC Press, 2019.
- [24] HÖLDER, O.: *Über einen Mittelwerthssatz*. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen (1889), 38–47.
- [25] JENSEN, J. L. W. V.: *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*. Acta Math. 22 (1899), 359–364.
- [26] JENSEN, J. L. W. V.: *Om konvekse funktioner og uligheder mellem middelveerdier*. Nyt Tidsskr. Math. B 16 (1905), 49–69.
- [27] JENSEN, J. L. W. V.: *Sur les fonctions convexes et les inegalites entre valeurs moyennes*. Acta Math. 30 (1906), 175–193.
- [28] JENSEN, J. L. W. V.: *An elementary exposition of the theory of the gamma function*. Ann. of Math. 17 (1916), 124–166.
- [29] JESSEN, B.: *Harald Bohr, 22 April 1887–22 January 1951*. Acta Math. 86 (1951), I–XXIII.
- [30] JESSEN, B.: *Some aspects of the theory of almost periodic functions*. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954 held at Amsterdam, 1957*, 305–314.
- [31] JESSEN, B.: *Orthogonal icosahedra*. Nordisk Matematisk Tidsskrift 15 (1967), 90–96.
- [32] KISELMAN, CH. O.: *Werner Fenchel, a pioneer in convexity theory and a migrant scientist*. Normat 61 (2019), 133–152.
- [33] KJELDSEN, T. H.: *Episodes of interferences of war and math in the life and work of Werner Fenchel*. Amazônia 16 (2020), 15–27.
- [34] MOLLERUP, J., BOHR, H.: *Lærebog i matematisk analyse III*. Jul. Gjellerups Forlag, 1922.
- [35] NICULESCU, C. P., PERSSON, L.-E.: *Convex functions and their applications. A contemporary approach*. Springer, 2025.
- [36] NØRLUND, N. E.: *J. L. W. V. Jensen*. Matematisk Tidsskrift B (1926), 43–51.
- [37] PÁL, J.: *Über eine Anwendung des Weierstraßschen Satzes von der Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome*. Tohoku Math. J. 5 (1914), 8–9.

- [38] PÁL, J.: *Ein Minimumproblem für Ovale*. Math. Ann. 83 (1921), 311–319.
- [39] PETERSEN, J.: *Die Theorie der regulären Graphs*. Acta Math. 15 (1891), 193–220.
- [40] PETERSEN, J.: *Sur le théorème de Tait*. Interméd. Math. 5 (1898), 225–227.
- [41] PŘINOSIL, M.: *Jensenova nerovnost a její aplikace*. Diplomová práce. PřF MU v Brně, 2005. Dostupné z: <https://theses.cz/id/mr505t/>
- [42] RAMSKOV, K.: *The Danish Mathematical Society through 125 years*. Hist. Math. 27 (2000), 223–242.
- [43] SIEGMUND-SCHULTZE, R.: *The interplay of various Scandinavian mathematical journals (1859–1953) and the road towards internationalization*. Hist. Math. 45 (2018), 354–375.
- [44] SØRENSEN, H. K.: *Confluences of agendas: Emigrant mathematicians in transit in Denmark, 1933–1945*. Hist. Math. 41 (2014), 157–187.
- [45] SØRENSEN, H. K.: *Aksel Frederik Andersen* [online]. Dostupné z: <https://www.icmihistory.unito.it/portrait/andersen.php>
- [46] SPÍCHAL, L.: *Superelipsa a superformule*. Matematika–fyzika–informatika 29 (2020), 54–69.
- [47] STOLZ, O.: *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Erster Teil: Reelle Veränderliche und Functionen*. Teubner, 1893.
- [48] ŠIŠMA, P.: *Teorie grafů 1736–1963*. Prometheus, 1997.
- [49] TAPP, K.: *Differential geometry of curves and surfaces*. Springer, 2016.
- [50] The most famous mathematicians from Denmark [online]. Dostupné z: <https://pantheon.world/profile/occupation/mathematician/country/denmark>
- [51] TITCHMARSH, E. C.: *Obituary: Harald Bohr*. J. Lond. Math. Soc. 28 (1953), 113–115.
- [52] VESELÝ, J.: *Poznámky k historii funkce gama*. In: J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): *Člověk-umění-matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky*, Prometheus, 1996, 49–71.
- [53] VESELÝ, M.: *Skoroperiodické funkce*. Bakalářská práce. PřF MU v Brně, 2005. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/ruz11/b.pdf>