Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944)

Antonín Slavík, Jiří Veselý

Abstrakt. Před osmdesáti lety zemřel v Terezíně německý matematik Ludwig Otto Blumenthal, žák Davida Hilberta. Trochu kuriózní je fakt, že se do Terezína dostal na vlastní žádost. Mezi německými matematiky přelomu 19. a 20. století je jeho osud jedním z nejtragičtějších. V textu připomínáme jeho život a oblasti matematiky, kterým se věnoval.

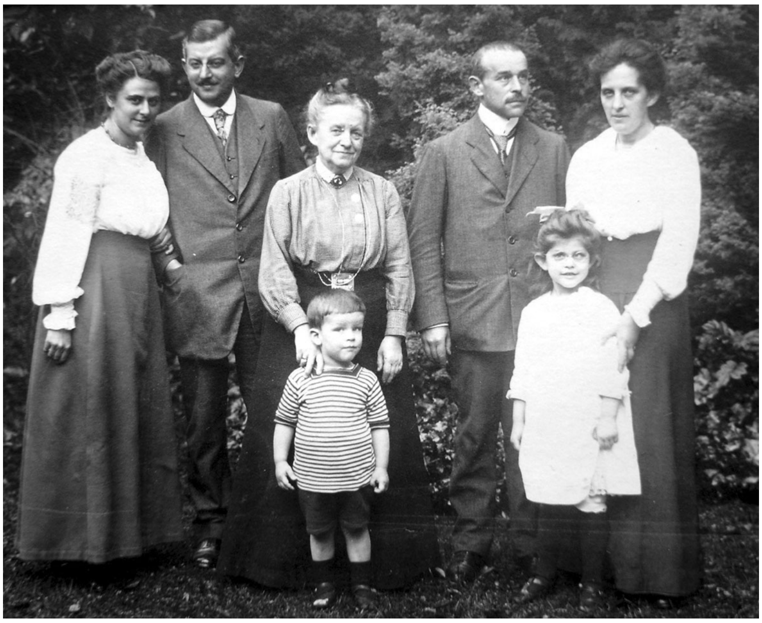
1. Blumenthalův život

Ludwig Otto Blumenthal se narodil v rodině židovského lékaře Ernsta Blumenthala ve Frankfurtu nad Mohanem. Po absolvování tamějšího gymnázia začal studovat v Göttingenu medicínu. Jeho zájem si však brzy získaly přírodní vědy a matematika. Z učitelů měli na něj největší vliv matematikové David Hilbert (1862–1943), Felix Klein (1849–1925) a fyzik Arnold Sommerfeld (1868–1951). Část studia matematiky absolvoval v Mnichově, kde navštěvoval např. přednášky Ferdinanda von Lindemanna (1852–1939) a také Alfreda Pringsheima (1850–1941).

Roku 1898 v Göttingenu obhájil doktorskou disertaci [3], kterou sepsal pod vedením Hilberta, v jejím závěru však děkuje též Sommerfeldovi. Zimní semestr školního roku 1899/1900 strávil Blumenthal v Paříži u Émila Borela (1871–1956) a Camilla Jordana (1838–1922). V roce 1901 se v Göttingenu habilitoval a působil tam jako soukromý docent až do roku 1905.

V roce 1901 bylo Sommerfeldovi nabídnuto místo vedoucího katedry mechaniky na Porýnsko-vestfálské technické univerzitě v Cáchách (*Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen*, dále jen RWTH). Sommerfeld toto místo přijal a později fyzikovi a rektorovi RWTH Adolfu Wüllnerovi (1835–1908) doporučil Blumenthala. Ten byl 1. října 1905 v Cáchách ve věku 29 let jmenován profesorem matematiky; předtím působil krátce v Marburgu. David Hilbert při této příležitosti pronesl projev, který začínal větou: *Když si představím přítele Blumenthala, celou jeho bytost, jednání a úmysly, zdá se mi, že nic není bližšího základnímu rysu jeho osobnosti nežli potěšení, které má ze své práce, a upřímná radost, s jakou ji tvůrčím způsobem vykonává.* Blumenthal se roku 1908 oženil s dcerou göttingenského lékaře Wilhelma Ebsteina (1836–1912) Amalií známou spíše jako Mali (1876–1943). Měli čtyři děti, synové Karl Wilhelm (nar. 1910) a Peter Paul (nar. 1920) však zemřeli velmi mladí a pouze dcera Margrete (1911–1980) a syn Ernst (1914–1974) se dožili dospělosti; viz [13]. První světové války se Blumenthal zúčastnil nejprve jako voják, pak pracoval asi dva roky jako ředitel vojenských meteorologických stanic a ve firmě Siemens-Schuckert na konstrukci letadel. Roku 1919 se vrátil na RWTH. V roce 1924 zastával funkci předsedy Německé matematické společnosti (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, dále DMV).

Doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `slavik@karlin.mff.cuni.cz`, doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Kolínská 15, 130 00 Praha 3, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`



Obr. 1. Na snímku jsou postupně zprava Amalie a Otto Blumenthalovi s dětmi Margrete a Ernstem, vedle Amaliina matka Elfriede Ebsteinová a bratr Erich Ebstein s chotí Carolou (Göttingen, 1915). Originál fota je majetkem rodiny Blumenthalových

V roce 1930 navštívil na pozvání Charkov, o rok později pak Moskvu, Leningrad, Charkov a Tiflis (nynější Tbilisi).

Po nástupu nacistů k moci byl roku 1933 propuštěn, nebylo to však přímo z rasových důvodů, neboť to v té době v jeho případu ještě nešlo. Ve zdůvodnění se objevuje odkaz na jeho členství v Lize pro lidská práva (*Liga für Menschenrechte*), o kterém Blumenthal v dotazníku, který musel vyplnit, napsal: *Vstoupil jsem do Ligy pro lidská práva, protože jsem sympatizoval s jejími mírovými a prolidskými snahami. Aktivně jsem v ní ani pro ni nepracoval, stejně tak jako je mi cizí politická činnost. Neúčastnil jsem se jejích schůzí ani jiných akcí a nebyl jsem v kontaktu s žádným z jejích členů.*[1]

Situace jeho rodiny se rázem změnila. Narůstající diskriminace, ztráta některých přátel, zaměstnání a perspektivy, chování některých studentů a kolegů, k tomu studující nezajištěné děti – to vše doléhalo na Blumenthalovu psychiku. Dcera Margrete měla štěstí: studovala v Kolíně nad Rýnem a mohla v roce 1934 dokončit doktorské zkoušky. Syna Ernsta, kterému bylo již v roce 1933 znemožněno pokračovat na RTWH, poslali rodiče studovat do Manchesteru a zakrátko se v Anglii ocitla i Margrete; viz [12].

Po roce 1933 Blumenthal přednášel již pouze mimo Německo. Na podzim roku 1934 navštívil Švýcarsko, později též Sofii, kde měl 20 hodin přednášek o integrálních rovnicích, a Prahu, kde spolek Lotos dne 29. dubna 1935 uspořádal jeho přednášku *David Hilberts Leben und Werke. Aus Anlaß der Herausgabe seiner gesammelten Werke* (viz [1], str. 341).

[1] Blumenthal byl také členem Společnosti pro mír (*Friedensgesellschaft*), která se rovněž ideologicky rozcházela s nacismem.

Je ironií osudu, že v roce 1936 Blumenthal obdržel vyznamenání za válečné zásluhy (*Ehrenkreuz für Frontkämpfer*; dokument je reprodukován v [13], str. 28). Život v Německu se přitom pro jeho rodinu pomalu ale jistě stával čím dál hůře snesitelným. Měli sice stále dost věrných přátel a podporovatelů, ti však nemohli jejich blížícímu se tragickému osudu zabránit. Židé byli stále více vytlačováni na okraj společnosti a jakékoli jednání s úřady bylo stále těžší. Blumenthalovy snad alespoň trochu uklidňoval fakt, že se jim podařilo dostat děti do relativního bezpečí. Tak jako mnoho jiných v podobné situaci uvažovali o odchodu do Nizozemska, které tehdy bylo jakousi přestupní stanicí na cestě do bezpečí. Navíc Blumenthal měl např. v Delftu řadu dobrých přátel (M. Burgers, C. B. Biezeno, J. A. Schouten), kteří mu pomohli získat povolení ke vstupu do Nizozemska. A tak rozhodnutí odejít do této země postupně začalo nabývat konkrétní podoby.

2. Blumenthalova matematika

Přerušíme nyní na okamžik vyprávění o Blumenthalově životním osudu stručným popisem jeho odborných aktivit. Patřil k těm, jejichž práce není nápadná, ale je nepostradatelná. V období 1906–1938, tj. po dobu 32 let, byl výkonným redaktorem prestižního časopisu *Mathematische Annalen*. Od roku 1900 byl členem DMV a v období 1924–1933 redaktorem jejího časopisu *Jahresbericht der DMV*. Byl také autorem Hilbertova životopisu [6].

Matematické tvorbě Otto Blumenthala je věnována pozornost ve velmi obsáhlém článku [8], kterým je inspirován následující výklad, a dále v článcích [2], [30]. Zaměříme se pouze na vybrané aspekty jeho výzkumu s důrazem na výsledky, které jsou dodnes citovány.

Blumenthal se zabýval matematickou analýzou, zejména teorií funkcí komplexní proměnné, a v duchu göttingenské tradice jej zajímaly i aplikace. O tuto tradici se zasloužili nejen Klein a Hilbert, ale také Hermann Minkowski (1864–1909) a Carl Runge (1856–1927). Blumenthalova disertace byla věnována řetězovým zlomkům, které vznikají rozvojem funkcí ve tvaru Stieltjesova integrálu

$$f(z) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}\Phi(\xi)}{z-\xi}. \tag{1}$$

V další sérii prací se zabýval fyzikálně-technologickými problémy. V některých zmiňuje podněty svých cášských kolegů, fyziků Theodora von Karmána (1881–1963), Ludwiga Hopfa (1884–1939)[2] či Eleonory Trefftz (1920–2017). Cáchy byly především inženýrským pracovištěm a to se odráželo i v doktorských pracích, které vedl. Jedna byla např. věnována otevřenému zásadnímu problému podélné nestability letadel. Za zmínku stojí fakt, že i dvě práce samotného Blumenthala byly věnovány problému napětí a namáhání v křídlech letadel.

[2]Hopfovi, který byl také roku 1933 propuštěn, se podařilo utéct s manželkou a dcerou z Německa do Anglie. Získal místo v irském Dublinu, kde v prosinci 1939 náhle zemřel; viz [13], str. 496–497.

2.1. Ortogonální systémy polynomů

Popíšeme podrobněji jedno tvrzení z Blumenthalovy disertační práce [3], které souvisí s nulovými body ortogonálních systémů polynomů. Blumenthal k této problematice dospěl při studiu polynomů, které představují čitatele a jmenovatele sblížených zlomků (konvergent) v rozvoji výše zmíněné funkce (1).

Nejprve připomeneme některé základní pojmy a výsledky související s ortogonálními systémy; podrobnější informace včetně předpokladů všech tvrzení lze najít v knize [19] a v digitální knihovně funkcí [24].

Nechť je dán interval $I \subset \mathbb{R}$ a váhová funkce $w\colon I \to [0, \infty)$, která není skoro všude nulová. Ortogonální systém polynomů vzhledem k funkci w na intervalu I je posloupnost $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde p_n je polynom stupně n a platí[3]

$$\int_I p_n(x)\, p_m(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n.$$

Ortogonální systémy polynomů mají řadu aplikací v teorii obyčejných diferenciálních rovnic, matematické fyzice, teorii aproximace a dalších disciplínách. Z klasických ortogonálních systémů jsou historicky nejstarší Legendreovy polynomy P_n, které vzhledem k váhové funkci $w(x) = 1$ tvoří ortogonální systém na intervalu $[-1, 1]$ a splňují $P_n(1) = 1$; těmito podmínkami je již posloupnost jednoznačně určena. Z dalších známých ortogonálních systémů jmenujme např. ještě Hermiteovy polynomy (váhová funkce $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, resp. $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ na celé reálné ose) a Čebyševovy polynomy prvního druhu, které lze získat ze vztahu

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n.$$

Pokud v integrálu provedeme substituci $x = \cos\theta$, pak je $\mathrm{d}x = -\sin\theta\, \mathrm{d}\theta$, neboli $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}x/\sin\theta = -\mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2}$. Dostáváme

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x) \big(1 - x^2\big)^{-1/2}\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \neq n,$$

kde jsme zavedli označení

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Ačkoliv to není na první pohled zřejmé, pomocí goniometrických vztahů lze ukázat, že funkce T_n představují polynomy a lze je tudíž uvažovat na celé reálné ose. Nazývají se Čebyševovy polynomy prvního druhu a vztah (2) ukazuje, že jde o ortogonální systém polynomů vzhledem k váhové funkci $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ na intervalu $(-1, 1)$.

V některých situacích potřebujeme informace o nulových bodech ortogonálního systému. Podle definice má polynom p_n v libovolném ortogonálním systému stupeň n. Dá se dokázat, že všechny jeho kořeny jsou reálné a navzájem různé; označme je $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$. Dále platí tzv. věta o oddělování, která říká, že mezi každými

[3] Obecněji je možné místo váhové funkce w uvažovat Lebesgueovu–Stieltjesovu míru μ generovanou jistou neklesající funkcí. Podmínka ortogonality má pak tvar $\int_I p_n(x)\, p_m(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 0$ pro $m \neq n$.

dvěma po sobě jdoucími kořeny polynomu p_{n+1} leží právě jeden kořen polynomu p_n, tj. platí

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1} \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Z monotonie plyne, že existují limity $\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}$ a $\eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}$, přičemž $-\infty \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \eta_2 \leqq \eta_1 \leqq \infty$. Hodnota ξ_i je limita i-tých kořenů polynomů p_n, počítáme-li kořeny od nejmenšího, a hodnota η_j je limita j-tých kořenů polynomů p_n, počítáme-li od největšího. Interval $[\xi_1, \eta_1]$ je nejmenší interval obsahující kořeny všech polynomů ortogonálního systému. Protože $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ je neklesající a $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ je nerostoucí, můžeme ještě zavést označení

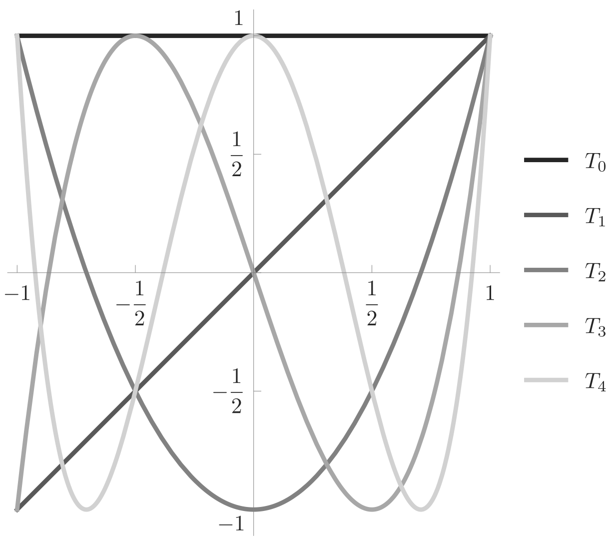
$$\sigma = \lim_{i\to\infty} \xi_i, \quad \tau = \lim_{j\to\infty} \eta_j,$$

které budeme později potřebovat.

V případě Čebyševových polynomů T_n je situace jednoduchá: Ze vztahu (2) snadno zjistíme, že T_n má n kořenů v bodech $\cos(\frac{\pi(k+1/2)}{n})$, kde $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Protože kosinus je klesající funkce na $[0, \pi]$, platí

$$x_{n,i} = \cos\left(\frac{\pi(n-i+1/2)}{n}\right), \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Skutečnost, že kořeny po sobě jdoucích polynomů T_n a T_{n+1} se střídají, dokládá obr. 2. Ze vztahu (3) snadno zjistíme, že $\xi_i = -1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a $\eta_j = 1$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Platí tedy $[\sigma, \tau] = [-1, 1]$. Množina všech kořenů Čebyševových polynomů je hustá podmnožina tohoto intervalu; později uvidíme, že to není náhoda.



Obr. 2. Čebyševovy polynomy $T_0, \ldots, T_4$

Případy, kdy známe přesné hodnoty kořenů p_n, jsou spíše výjimečné. Např. u Legendreových polynomů P_n lze kořeny přesně vypočítat jen pro nízké hodnoty n; u vyšších stupňů nezbývá, než počítat numericky. I v takových případech je však možné dokázat, že množina všech kořenů je hustá v jistém intervalu, což je jeden z výsledků Blumenthalovy disertace [3].

Je známo, že každý ortogonální systém polynomů splňuje jistou lineární rekurentní rovnici ve tvaru

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde A_n, B_n, C_n jsou reálné konstanty a $p_{-1}(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Například pro Legendreovy polynomy P_n máme $A_n = \frac{2n-1}{n}$, $B_n = 0$, $C_n = \frac{n-1}{n}$, zatímco Čebyševovým polynomům T_n odpovídá volba $A_n = 2$ pro $n \neq 1$, $A_1 = 1$, $B_n = 0$, $C_n = 1$ (viz [24], oddíl 18.9 (i)).

Pokud chceme studovat nulové body ortogonálního systému $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, můžeme předpokládat, že všechny polynomy jsou monické, tj. koeficient u nejvyšší mocniny je 1 (v opačném případě polynomy vydělíme příslušným koeficientem, čímž se neporuší ortogonalita ani poloha kořenů). Pro monické polynomy se předchozí rekurentní rovnice zjednoduší do tvaru

$$p_n(x) = (x - c_n)p_{n-1}(x) - \lambda_n p_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

pro jisté reálné konstanty c_n a λ_n. Nyní již můžeme zformulovat Blumenthalův výsledek: *Jestliže existují vlastní limity* $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ *a* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, *pak pro dříve zavedené hodnoty* σ, τ *platí*

$$\sigma = c - 2\sqrt{\lambda}, \quad \tau = c + 2\sqrt{\lambda}$$

a množina všech nulových bodů polynomů p_n *je hustá podmnožina intervalu* $[\sigma, \tau]$.

Důkaz je netriviální, dá se nalézt např. v Chiharově článku [18] a pozdější knize [19], s. 121. Tvrzení je zmiňováno i dalšími autory, byl to však patrně Chihara, kdo jej poprvé nazval Blumenthalovou větou. Podrobnosti a informace o souvisejících výsledcích může čtenář nalézt v [8].

Pro ilustraci uvažujme Legendreovy polynomy P_n. Nechť k_n značí koeficient u x^n v polynomu P_n. Vydělením získáme monické polynomy $\widetilde{P}_n = P_n/k_n$, které podle [24], oddíl 3.5 (vi) splňují rekurentní rovnici

$$\widetilde{P}_n(x) = x\widetilde{P}_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2 - 1}\widetilde{P}_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Srovnáním se vztahem (4) vidíme, že v tomto případě platí

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = 0, \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

Z Blumenthalovy věty pak plyne $\sigma = -1$, $\tau = 1$ a skutečnost, že množina všech kořenů polynomů $\widetilde{P}_n$, tudíž i Legendreových polynomů P_n, je hustá v intervalu $[-1, 1]$.

Je na místě ještě podotknout, že ne všechny výsledky o ortogonálních polynomech z Blumenthalovy disertace jsou správné; viz [18], s. 364 a [20].

2.2. Maximum modulu a věta o třech kružnicích

Během svého pobytu v Paříži se Blumenthal patrně blíže seznámil s teorií funkcí komplexní proměnné. Do této oblasti patří jeho další výsledek, kterému se budeme věnovat. Pro jednoduchost budeme pracovat s holomorfní (tj. diferencovatelnou) funkcí $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; úvahy je ovšem možné zobecnit na funkce, které jsou holomorfní pouze v kruhu nebo v mezikruží se středem v počátku.

Pokud nás zajímá chování funkce f, můžeme se ptát, jaké maximální hodnoty nabývá $|f|$ (neboli modulus f) na kružnici se středem v počátku a poloměrem r. Dostaneme tak funkci

$$M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad r \geqq 0. \tag{5}$$

Je zřejmé, že M je spojitá funkce. Pokud f není konstantní, pak je M rostoucí. Skutečně, pro každé $r > 0$ nabývá spojitá funkce $|f|$ maxima v kruhu se středem v počátku a poloměrem r, a podle tzv. principu maxima modulu, což je jedna ze základních vět komplexní analýzy, toto maximum nemůže ležet uvnitř kruhu (jinak by f byla konstantní).

Nabízí se přirozená otázka, zda vhodnou volbou nekonstantní holomorfní funkce f lze získat zcela libovolnou jí přiřazenou rostoucí funkci M. Záporná odpověď plyne z Blumenthalovy práce [4], kde je dokázáno, že funkce

$$r \mapsto r \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \log M(r), \quad r > 0,$$

je vždy rostoucí (jde tedy po monotonii o další nutnou podmínku na funkci M).

Častěji bývá Blumenthalovo tvrzení formulováno jiným způsobem. Abychom mu porozuměli, učiníme následující pozorování: Mějme jistou reálnou funkci g takovou, že $x \mapsto xg'(x)$ je rostoucí na $(0, \infty)$. Definujeme-li funkci $h(t) = g(\mathrm{e}^t)$, $t \in \mathbb{R}$, pak platí $h'(t) = \mathrm{e}^t g'(\mathrm{e}^t)$, což je podle předpokladu rostoucí funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Tudíž h je konvexní funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$ a přechodem zpět k funkci $g(x) = h(\log x)$ můžeme říct, že g je konvexní funkcí $\log x$.

Blumenthalovo tvrzení tedy vlastně znamená, že $\log M(r)$ je konvexní funkcí $\log r$. Ještě známější je varianta, které se říká Hadamardova věta o třech kružnicích. Uvažujme tři kružnice se středy v počátku a poloměry $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Pokud známe maxima $|f|$ na krajních kružnicích, tj. hodnoty $M(r_1)$ a $M(r_3)$, co lze říct o hodnotě $M(r_2)$, která je maximem $|f|$ na prostřední kružnici? Z výše uvedených úvah plyne, že funkce $h(t) = \log M(\mathrm{e}^t)$, $t \in \mathbb{R}$, je konvexní. To podle definice znamená, že platí

$$h((1-\lambda)t_1 + \lambda t_3) \leqq (1-\lambda)h(t_1) + \lambda h(t_3)$$

pro každou volbu $\lambda \in [0,1]$ a $t_1 < t_3$. Zvolme t_1 a t_3 tak, aby platilo $\mathrm{e}^{t_1} = r_1$ a $\mathrm{e}^{t_3} = r_3$. Předchozí nerovnost pak bude mít tvar

$$\log M(\mathrm{e}^{(1-\lambda)t_1 + \lambda t_3}) \leqq (1-\lambda) \log M(r_1) + \lambda \log M(r_3). \tag{6}$$

Zvolíme-li

$$\lambda = \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}, \quad \text{tj. } 1 - \lambda = \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1},$$

pak snadno zjistíme, že $(1-\lambda)t_1 + \lambda t_3 = \log r_2$, a dosazením do levé strany nerovnosti (6) obdržíme

$$\log M(r_2) \leqq (1-\lambda) \log M(r_1) + \lambda \log M(r_3),$$

neboli po rozepsání

$$\log M(r_2) \leqq \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_2). \tag{7}$$

To je zmíněná Hadamardova věta o třech kružnicích, která umožňuje odhadnout $M(r_2)$ pomocí $M(r_1)$ a $M(r_3)$. Někdy se lze setkat s ekvivalentní podobou, kterou získáme vynásobením $\log r_3 - \log r_1$ a použitím exponenciální funkce:

$$M(r_2)^{\log(r_3/r_1)} \leqq M(r_1)^{\log(r_3/r_2)} M(r_3)^{\log(r_2/r_1)}. \tag{8}$$

Variantu (8) lze nalézt např. v článku J. E. Littlewooda [22] z roku 1912, autor však neuvedl její důkaz ani jakýkoliv odkaz na zdroj. Stejná nerovnost se objevila v článku H. Bohra a E. Landaua [7] z roku 1913, přičemž za jejího autora označili J. Hadamarda. Konečně G. H. Hardy uvedl v práci [16] z roku 1915 nerovnost (7) a napsal, že toto tvrzení objevili nezávisle na sobě Blumenthal, Faber a Hadamard, přičemž první formulace pochází od Hadamarda a první důkaz od Blumenthala.

Zmínění matematikové využívali větu o třech kružnicích např. ke zkoumání vlastností Riemannovy funkce zeta, o čemž svědčí i názvy článků [7], [22]. O souvislosti s Riemannovou funkcí se lze dočíst i v pěkné přehledové knize [10], oddíl 9.3. Závěrem ještě zmíníme úzce související výsledek, tzv. větu o třech přímkách. Ta umožňuje odhadnout maximum modulu holomorfní funkce na přímce $y = y_0$ pomocí maxim modulu na přímkách $y = a$ a $y = b$, kde $a < y_0 < b$. Větu o třech kružnicích lze pak jednoduše odvodit jako důsledek věty o třech přímkách, která se většinou dokazuje pomocí principu maxima modulu; viz např. [32], kapitola 23.

2.3. Maximální křivky

Funkce M zavedená vztahem (5), která popisuje maximum $|f|$ na kružnici o poloměru r, závisí na volbě f. Abychom tuto skutečnost zdůraznili, budeme nyní psát

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad r \geqq 0.$$

Blumenthala zajímala nejen hodnota maxima $|f|$ na dané kružnici, ale také body, ve kterých se tohoto maxima nabývá. Studoval tedy množinu

$$\mathcal{M}(f) = \{z \in \mathbb{C} \colon |f(z)| = M(|z|, f)\}.$$

Není těžké si rozmyslet, že pro mocninnou funkci ve tvaru $f(z) = cz^n$, kde $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \geqq 0$, platí $\mathcal{M}(f) = \mathbb{C}$, protože hodnoty $|f|$ jsou konstantní podél každé kružnice $|z| = r$.

Blumenthal ukázal [5], že pro všechny ostatní funkce f, které jsou holomorfní v celé komplexní rovině, nabývá $|f|$ maxima pouze v konečně mnoha bodech libovolné kružnice $|z| = r$. Jestliže tyto body vyznačíme na každé kružnici, získáme množinu $\mathcal{M}(f)$

a tato množina je sjednocením nejvýše spočetně mnoha křivek, které Blumenthal nazval maximálními křivkami funkce f. Studoval jejich obecné vlastnosti (diferencovatelnost, body nespojitosti a další vlastnosti), ale zabýval se i tím, jak tyto křivky tvořící množinu $\mathcal{M}(f)$ vypadají pro konkrétní funkce f.

Křivky lze sestrojit tak, že označíme

$$G(r, \theta) = |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|, \quad r \geqq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

a pro každé $r > 0$ hledáme maximum funkce $\theta \mapsto G(r, \theta)$ na intervalu $[0, 2\pi]$. K tomu lze využít například nutnou podmínku pro extrém a hledat body splňující $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$.

Blumenthal uvádí, že případ lineární funkce $f(z) = z + z_0$, kde $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, je velmi jednoduchý: Na každé kružnici $|z| = r$ má funkce $|f|$ právě jedno maximum a platí $M(r, f) = r + |z_0|$. Skutečně, použijeme-li goniometrický tvar a píšeme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ a $z_0 = r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, pak máme

$$G(r, \theta) = |r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}| \leqq |r + r_0| = r + r_0,$$

přičemž rovnost nastává jen pro $\theta = \theta_0$. Dostáváme tedy jedinou maximální křivku, kterou je polopřímka vycházející z počátku.

Nalezení maximálních křivek pro kvadratický polynom $f(z) = z^2 + az + b$ je zajímavější, ale mnohem pracnější úloha. Blumenthal rozlišuje několik případů v závislosti na polohách kořenů polynomu (komplexně sdružené, reálné se stejným znaménkem, reálné s opačnými znaménky a všechny ostatní případy). Pro zajímavost uveďme výsledek pro případ, kdy kvadratický polynom f má reálné kořeny $z_1 < 0$ a $z_2 > 0$, přičemž $z_1 + z_2 > 0$. Položíme-li

$$r_1 = \frac{(\sqrt{|z_2|} - \sqrt{|z_1|})\sqrt{|z_1 z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}}, \qquad r_2 = \frac{(\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|})\sqrt{|z_1 z_2|}}{\sqrt{|z_2|} - \sqrt{|z_1|}},$$

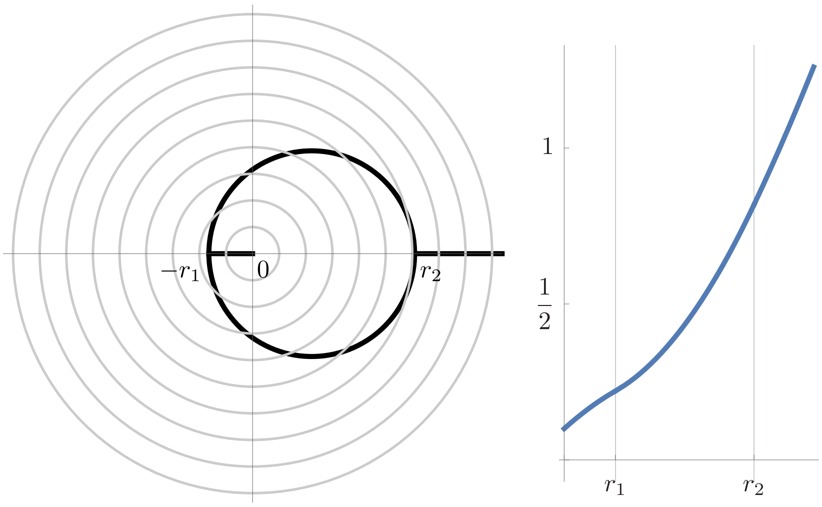
pak množina $\mathcal{M}(f)$ je sjednocením úsečky s koncovými body $(0, 0)$ a $(-r_1, 0)$, kružnice nad průměrem spojujícím body $(-r_1, 0)$ a $(r_2, 0)$ a polopřímky jdoucí z bodu $(r_2, 0)$ ve směru vodorovné osy; situaci znázorňuje obr. 3. Vidíme, že pro $r \in [0, r_1]$ dostáváme jako maximální křivku úsečku; ta se pro $r = r_1$ rozdělí na dva oblouky kružnic, které se pro $r = r_2$ spojí do polopřímky.

Blumenthala zajímalo, zda existují funkce f s nespojitými maximálními křivkami v tom smyslu, že pro jisté r skončí maximální křivka v jistém bodě roviny a poté pokračuje v jiném bodě. Vyslovil domněnku, že existuje kubický polynom s touto vlastností. První příklad holomorfní funkce s nespojitými maximálními křivkami našel G. H. Hardy [15]. Ukázal, že pro funkci

$$f(z) = \exp(\exp(z^2) + \sin z)$$

a dostatečně velká čísla r platí, že pro $\sin r > 0$ leží příslušná maximální křivka v kladné části osy x, zatímco pro $\sin r < 0$ v záporné části. Jedná se tedy o příklad s nekonečně mnoha body nespojitosti.

Správnost Blumenthalovy domněnky byla potvrzena až mnohem později: S. A. Jassim a R. R. London [21] dokázali, že maximální křivky polynomu $z^3 + az^2 - z + b$ nejsou spojité pro $b > 0$ a $ab > 1 + 2b$.



Obr. 3. Vlevo je tučně vyznačena množina $\mathcal{M}(f)$ pro polynom $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ společně s kružnicemi centrovanými v počátku (slabé čáry); vpravo je příslušná funkce $M(r, f)$ složená ze tří částí parabol

Různým problémům spojeným s funkcí $M(r, f)$, maximálními křivkami a jejich tvarem se věnovala řada dalších autorů. Skutečnost, že se jedná o stále živé téma, dokládají např. novější publikace [17], [25], [31].

3. V Nizozemsku a v Terezíně

Následující popis další etapy Blumenthalova života vychází zejména z informací v [8], [12], [13]. Blumenthal byl perzekvován pro své levicové názory, ale i z rasových důvodů, a to přesto, že on i jeho rodiče konvertovali v roce 1895 k protestantismu. Sám Blumenthal byl v Cáchách aktivním členem protestantské komunity po mnoho let. Podle nacistických zákonů však konverze víry nebyla uznávána. Až do roku 1938 mohl pracovat jako výkonný redaktor *Mathematische Annalen*, ale pak mu byla jakákoliv práce znemožněna. Po mnoha letech obětavé práce pro DMV ztratil možnost být členem organizace, které kdysi předsedal! Po dlouhém rozvažování se Blumenthalovi odhodlali v březnu 1939 prodat svůj krásný dům se zahradou a opustit Německo. Jediná nabídka práce, kterou Blumenthal v té době měl, byla z nizozemského Delftu. A tak se Blumenthalovi 13. července 1939 vydali do Nizozemska.

V letech 1939 až 1944 si Blumenthal psal deník. Používal k tomu kapesní diáře, a tak zápisy mají převážně heslovitý charakter. Deník doplněný rozsáhlými komentáři [13] vyšel zásluhou Volkmara Felsche v roce 2011.[4] Je překvapivé, jak nezaujatě Blumenthal k psaní přistupoval, jako by byl školený profesionální historik. Jako ukázku uvádíme překlad zápisu o odjezdu z Německa dne 13. července 1939.

> *Velmi teplo. 8.15 odchod od paní Ruerové. Strašné hodiny doma, kde zůstala spousta důležitých věcí. M*[5] *se v poslední hodině snažila uspořádat staré dopisy*

[4] Podrobná a velmi pochvalná recenze komentovaného deníku vyšla v článku [9].
[5] Iniciála M značí Blumenthalovu manželku Mali.

a skoro zuřila. 11.30 odnesla zbytek zavazadel k Lauffovým. 12.15 doma. Stále jsou tu zbytky, se kterými je třeba něco udělat. 12.30 na Západním nádraží. Pan Tillmann tam autem přiváží dva šperky, které M od včerejšího večera marně hledala. Hladká celní kontrola. Hafeneth zařídil, že paní Ruerová a moje sestra mohou na nástupiště, ale nesmějí vstupovat do vlaku. Rozloučení s Německem. Trčíme dvě hodiny v Simpelveldu, protože ještě nedorazilo moje povolení ke vstupu. M k smrti unavená. Telegrafoval jsem Wolffovi.[6] *Ze Simpelveldu 16.11. Chytili jsme v Maastrichtu zpožděný rychlík z Basileje. Setkání s Wolffem v Utrechtu 19.30, s ním domů, kde ale nebylo nic k jídlu. Telefonoval baronu van Tuyllovi a Friedě. Baron nás chtěl vyzvednout na nádraží, což byla hrozná příhoda. Kolem desáté večer v Zuilenveldu. Přátelské přijetí, poněkud zklamaní z místa. K smrti unavení. Kostky jsou vrženy.*

Blumenthal se dokázal přenést přes ponižující chování některých kolegů či bývalých přátel. Život se stal na krátký čas příjemnější, až skoro normální. Poměrně rychle zapadl do nizozemské matematické komunity a porozuměl si s jejími členy. Podařilo se mu zúčastnit se kongresu v belgickém Lutychu, kde se objevili nejrůznější staří známí, včetně Godeauxe, Lebesguea, Cartana, van der Woudea a van der Corputa. Do svého deníku si poznamenal: *Francouzi byli velmi přátelští, přestože jsem se Lebesguea bál.*

V srpnu 1939 Blumenthalovi navštívili své děti v Británii. S ohledem na napjatou politickou situaci jejich dcera Margrete (možná nepochopitelně) naléhala na rodiče, aby se urychleně vrátili do Nizozemska. A oni skutečně odjeli 26. srpna, pouhých pět dní před vypuknutím války. Šlo o tragický omyl, když uvážíme, že nacisté tehdy měli již Rakousko a v březnu 1939 obsadili Čechy a Moravu!

Začátek války 1. září zastihl Blumenthalovy v Utrechtu. V deníku se objevuje zápis:

Začátek druhé světové války. Nádherné počasí. Ráno zpráva o anexi Gdaňska. 10 hodin: Vůdcův projev v Říšském sněmu. … Večer rozhodnutí Anglie a Francie o odvolání jejich vyslanců. Je to děsivé a následky budou ještě děsivější.

K datu 10. května 1940, kdy bylo Nizozemsko napadeno Německem, si Blumenthal poznamenal:

Probuzen střelbou a hlukem letadel ve čtyři hodiny. Nejméně 10 letadel. Jedno letí velmi nízko, na něm železné kříže, z jednoho padají pomalu tři žluté předměty, pravděpodobně seskok padákem. Dole řve rádio. Značně proti své vůli jsem došel k přesvědčení, že je válka. V osm hodin jsem šel ven vhodit dopisy do schránky. Ihned zatčen a odvezen na stanici. Seděl jsem tam půldruhé hodiny, až se nade mnou slitoval jeden hodný poddůstojník a informoval Mali. Vrátil se s mým pasem a krátce nato jsem byl zdvořile propuštěn. Během zatčení mě Mali hledala u [delftského profesora matematiky] Schoutena, který byl údajně bílý jako stěna. Odpoledne opakovaná protiletadlová a kulometná palba.

[6] Julius Wolff (1882–1945) byl nizozemský matematik židovského původu. Blumenthal s ním napsal své poslední dvě matematické práce, které byly věnovány izoperimetrické úloze. Wolffa s rodinou později Němci převezli do Bergen-Belsenu, kde zemřel na tyfus.

Po marné snaze dostat se do bezpečí se Blumenthalovi v dubnu roku 1943 ocitli ve sběrném táboře ve Vughtu, odkud byli po 18 dnech převezeni do tábora ve Westerborku.[7] Tam Mali 21. května zemřela. Zpráva, kterou Blumenthal odeslal dětem prostřednictvím Červeného kříže, byla stručná:

> *Tábor Westerbork 73 (Drente Holland)*
> *Matka dnes zemřela v nemocnici v táboře Westerbork (Holandsko) na zápal plic. Je spasena, hodně na vás myslela. Zůstaňte silní, uctěte její památku! Přeji vám co nejlepší budoucnost!*
> *21. 5. 1943*
> *Otto Blumenthal*[8]

Když se Blumenthal dozvěděl, že jeho sestra Anna Bettina byla poslána do Terezína, požádal o převoz tamtéž a bylo mu vyhověno. Transportem č. 84 byl 18. ledna 1944 převezen a o dva dny později umístěn do terezínského ghetta. Když tam dorazil jen s několika posledními věcmi – učebnicemi matematiky, rodinnými fotografiemi a Biblí – byla jeho sestra již mrtvá; zemřela 13. června 1943.[9]

Blumenthal byl do poslední chvíle velmi aktivní. V Terezíně se začal učit desátý jazyk – češtinu. Neuhasl tam kulturní život a dokonce se tam i přednášelo. Podrobně o tom pojednává kniha příznačně nazvaná *University over the abyss* [23], která uvádí, že v letech 1942–1944 v Terezíně zaznělo 2 430 přednášek od 520 osob. Blumenthal vystoupil celkem jedenáctkrát s následujícími přednáškami (viz [29], s. 77):

- *Das Gesetz im Unfall* (3. března 1944);
- *Irrtümer als Erkenntnisquellen für die Mathematik* (4. března 1944);
- Matematika a experimentování (16. února 1944, původní název neznáme);
- *Funktionen und Kurven* (17. a 24. června 1944);
- *Konforme Abbildung* (20. června 1944);
- *Die Welt des Differentials und Integrals* (1. července 1944);
- *Kreisverwandtschaft und stereometrische Projektion* (10. července 1944);
- *Integralsätze der Funktionentheorie* (8., 15. a 22. srpna 1944).

V Terezíně našel také nové přátele. Byli mezi nimi např. český inženýr Emil Jílovský (1882–1962) a jeho žena Marie (1884–1958), kteří se mu snažili usnadnit těžký osud. Blumenthal zemřel 13. listopadu 1944 v terezínské nemocnici.[10] Jeho příbuzní se o tom dozvěděli až po válce, když požádali o pomoc pražského advokáta Jaroslava Jínu. Tomu se podařilo vypátrat Jílovského, který v dopise popsal své vzpomínky na Blumenthala a jeho poslední dny. Podle pitevního nálezu trpěl Blumenthal tuberkulózou a měl edém mozku, takže zřejmě zemřel „přirozenou“ smrtí. Každodenní utrpení, strach, hrůzy, hlad a zima však jeho odchod bezpochyby uspíšily.[11]

[7] Informace o Westerborku a Židech žijících v tehdejším Nizozemsku uvádí česká historička Anna Hájková [14].

[8] Fotokopie zprávy je reprodukována v [13], str. 470.

[9] Viz `https://www.pamatnik-terezin.cz/vezen/te-storm-anna`.

[10] Viz `https://www.pamatnik-terezin.cz/vezen/te-blumenthal-ludwig`.

[11] Jílovského dopis Jínovi z 5. října 1945 je reprodukován v [29] na s. 543–544. Na dalších stranách knihy je dopis německého chemika Gerta Salomona adresovaný Ernstu Blumenthalovi (6. října 1945) a dopis českého fyzika Bedřicha Goldschmieda adresovaný Margrete Blumenthalové (1. prosince 1946), které obsahují další vzpomínky na Blumenthala a jeho pobyt v Terezíně.

Podobný osud jako Blumenthal mělo mezi obětmi rasové a politické diskriminace Hitlerova režimu mnoho matematiků, ale k němu byl osud obzvláště krutý (viz [26], [27]). Byl to člověk, který se celý život rozdával jiným a který mnoho vytrpěl, a tak je snad jen dobře, že jeho konec byl rychlý. Čest jeho památce!

4. Závěr

Je škoda, že se Blumenthal nedožil doby, kdy se jeho vlast změnila a docenila výsledky jeho práce. K seznámení širší matematické veřejnosti s Blumenthalovým dílem a osudem podstatně přispěli Paul L. Butzer a Lutz Volkmann, autoři článku [8], a také Volkmar Felsch, který se zasloužil o vydání Blumenthalových deníků a biografie v knize [13]; deníky vypátral v roce 2003 v britském Northwichi, kde je opatrovala vdova po Ernstovi. Všichni tři jmenovaní působili na RWTH. Zájemcům doporučujeme též vynikající knihy [28], [29] obsahující kromě jiného výběr z Blumenthalovy korespondence; jejich autorem je americký matematik a historik David E. Rowe (spoluautorem druhého svazku je opět V. Felsch).

Poděkování. Autoři děkují Josefu Danešovi za poskytnutí cenných pramenů, pracovníkům Židovského muzea v Praze za zapůjčení literatury, Ivaně Rapavé a Tomáši Fedorovičovi z Památníku Terezín za pomoc při pátrání po terezínských dokumentech spojených s Blumenthalem a Volkmaru Felschovi za zaslání rodinné fotografie Blumenthalových.

Literatura

[1] Bečvářová, M.: *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882–1945.* Karolinum, 2016.

[2] Behnke, H.: *Otto Blumenthal zum Gedächtnis.* Math. Ann. 136 (1958), 387–392.

[3] Blumenthal, O.: *Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für* $\int_{-\infty}^{0}(z-\xi)^{-1}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Disertační práce. Georg-August-Universität Göttingen, 1898.

[4] Blumenthal, O.: *Über ganze transzendente Funktionen.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 16 (1907), 97–109.

[5] Blumenthal, O.: *Sur le mode de croissance des fonctions entières.* Bull. Soc. Math. France 35 (1907), 213–232.

[6] Blumenthal, O.: *Lebensgeschichte von David Hilbert.* In: D. Hilbert: Gesammelte Abhandlungen III, Springer, 1935, 388–429.

[7] Bohr, H., Landau, E.: *Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion.* Math. Ann. 74 (1913), 3–30.

[8] Butzer, P., Volkmann, L.: *Otto Blumenthal (1876–1944) in retrospect.* J. Approx. Theory 138 (2006), 1–36.

[9] van Dalen, D.: *Volkmar Felsch: Otto Blumenthals Tagebücher.* Math. Semesterber. 64 (2017), 105–112.

[10] Edwards, H. M.: *Riemann's zeta function.* Dover Publications, 2001.

[11] Evdoridou, V., Pardo-Simón, L., Sixsmith, D. J.: *On a result of Hayman concerning the maximum modulus set.* Comput. Methods Funct. Theory 21 (2021), 779–795.

[12] Felsch, V.: *Der Aachener Mathematikprofessor Otto Blumenthal* [online]. Dostupné z: https://www.math.rwth-aachen.de/~Blumenthal

[13] Felsch, V.: *Otto Blumenthals Tagebücher. Ein Aachener Mathematikprofessor erleidet die NS-Diktatur in Deutschland, den Niederlanden und Theresienstadt.* Hartung-Gorre Verlag, 2011.

[14] Hájková, A.: *Die Juden aus den Niederlanden in Theresienstadt.* Theresienstädter Studien und Dokumente 9 (2002), 135–201.

[15] Hardy, G. H.: *The maximum modulus of an integral function.* Q. J. Math. 41 (1909), 1–9.

[16] Hardy, G. H.: *The mean value of the modulus of an analytic function.* Proc. Lond. Math. Soc. 14 (1915), 269–277.

[17] Hayman, W. K., Tyler, T. F., White, D. J.: *The Blumenthal conjecture.* Contemp. Math. 591 (2013), 149–157.

[18] Chihara, T. S.: *Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals.* J. Math. Anal. Appl. 24 (1968), 362–371.

[19] Chihara, T. S.: *An introduction to orthogonal polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, 1978.

[20] Ifantis, E. K., Siafarikas, P. D.: *A counterexample to an assertion due to Blumenthal.* Univ. Iagell. Acta Math. 39 (2001), 249–254.

[21] Jassim, S. A., London, R. R.: *On the maximum modulus paths of a certain cubic.* Quart. J. Math. Oxford Ser. 37 (2) (1986), 189–191.

[22] Littlewood, J. E.: *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demiplan $\Re(s) > \frac{1}{2}$.* C. R. Acad. Sci. 154 (1912), 263–266.

[23] Makarova, E., Makarov, S., Kuperman, V.: *University over the abyss. The story behind 520 lecturers and 2 430 lectures in KZ Theresienstadt 1942–1944.* 2. vydání, Verba Publishers, 2004.

[24] NIST Digital Library of Mathematical Functions [online]. Dostupné z: https://dlmf.nist.gov/

[25] Pardo-Simón, L., Sixsmith, D. J.: *The maximum modulus set of a polynomial.* Comput. Methods Funct. Theory 22 (2022), 207–214.

[26] Pinl, M.: *Kollegen in einer dunkler Zeit.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. I: 71 (1969). 167–228; II: 72 (1971), 165–189; III: 73 (1972), 153–208.

[27] Pinl, M., Dick, A.: *Kollegen in einer dunkler Zeit, Schluss.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 75 (1973/1974), 166–208; Nachtrag und Berichtigung 77 (1976), 161–164.

[28] Rowe, D. E.: *Otto Blumenthal: Ausgewählte Briefe und Schriften I. 1897–1918.* Springer, 2018.

[29] Rowe, D. E., Felsch, V.: *Otto Blumenthal: Ausgewählte Briefe und Schriften II. 1919–1944.* Springer, 2019.

[30] Sommerfeld, A., Kraus, F.: *Otto Blumenthal zum Gedächtnis.* Jahrbuch der RWTH Aachen 4 (1951), 21–25.

[31] Tyler, T. F.: *Maximum curves and isolated points of entire functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 2561–2568.

[32] Ullrich, D. C.: *Complex made simple.* American Mathematical Society, 2008.