DESET ÚLOH Z REKREAČNÍ MATEMATIKY

Antonín Slavík

V tomto příspěvku předkládáme čtenáři deset rozmanitých úloh z rekreační matematiky. K jejich řešení nejsou zapotřebí hluboké znalosti matematiky; vystačíme s elementární aritmetikou, algebrou, geometrií a logikou. Řešení jsou krátká a někdy i překvapivá, neboť se může zdát, že zadání úlohy neposkytuje dostatek informací k jejímu vyřešení. Jistě není třeba zdůrazňovat, že by se čtenář měl pokusit každý problém nejprve vyřešit samostatně a teprvé poté prostudovat řešení.

Jak je v rekreační matematice obvyklé, vesměs se nejedná o úlohy inspirované praktickými problémy. Jejich cílem je především zaujmout čtenářovu pozornost, pobavit jej a probudit v něm zájem o řešení dalších úloh; ty lze najít např. ve zdrojích uvedených v seznamu použité literatury, ale i v mnoha dalších knihách.

Úloha 1. [1] Jistý benátský kupec poznal, že se blíží jeho poslední hodina, a nechal k sobě zavolat svých devět synů. Nejstaršímu dal 90 perel, druhému nejstaršímu 80 perel atd.; nejmladší syn dostal 10 perel. Kupec svým synům přikázal, aby perly prodali na trzích v Benátkách a v Padově. Dědictví po otci si pak mají rozdělit v poměru podle částek, které za perly utrží.

Synové se společně vydali do Padovy, a protože byli čestní, dohodli se, že budou perly prodávat za jednotnou cenu. V Padově každý z nich prodal část perel a poté společně pokračovali do Benátek. Tam se opět dohodli, že budou perly prodávat za jednotnou cenu. Poté, co prodali všechny zbývající perly, s překvapením zjistili, že všichni vydělali stejné množství peněz. Jak je to možné?

Řešení. Popsaná situace mohla nastat, pokud se lišily prodejní ceny perel v Padově a v Benátkách. Předpokládejme, že cena p jedné perly v Padově byla vyšší než cena b jedné perly v Benátkách. Pokud se všichni bratři vrátili domů se stejným množstvím peněz, znamená to, že mladší z každých dvou sourozenců prodal v Padově více perel než starší. Skutečně, pokud měli na začátku $10i$ a $10j$ perel, kde $i > j$, a v Padově prodali k, resp. ℓ perel, pak utržili částky $kp + (10i - k)b$, resp. $\ell p + (10j - \ell)b$. Jejich rozdíl je

$$(k - \ell)p + (10(i - j) - (k - \ell))b = (k - \ell)(p - b) + 10(i - j)b$$

[1] Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 64.

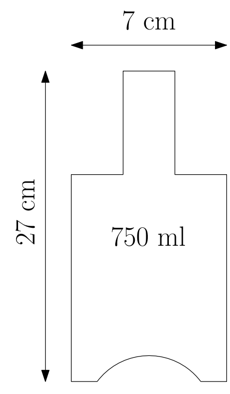
a pokud by platilo $k \geq \ell$, byl by tento rozdíl kladný.

Protože každý z bratrů prodal v Padově jen část perel, musel nejmladší prodat 9, druhý nejmladší 8, atd; nejstarší prodal pouze 1 perlu. V Benátkách pak nejmladší prodal 1 perlu, druhý nejmladší 12 perel atd.; nejstarší prodal 89 perel. Obecně platí, že i-tý nejmladší bratr prodal v Padově o 1 perlu více než $(i+1)$-ní nejmladší, který však v Benátkách prodal o 11 perel více, než jeho mladší sourozenec. Pokud oba vydělali stejnou částku, musela být cena 1 perly v Padově stejná jako cena 11 perel v Benátkách, tj. $p = 11b$. Tato podmínka skutečně zaručuje, že všichni bratři vydělali stejnou částku, neboť i-tý nejmladší vydělal

$$(10-i)p + (10i - (10-i))b = (10-i)11b + (11i-10)b = 100b$$

a tato hodnota nezávisí na čísle i.

Úloha 2. [2] Manželka kárá svého muže: „Už jsi zase popíjel whisky? Včera byla láhev plná a dnes v ní zbývá jen 14 centimetrů.“ Manžel otočí láhev dnem vzhůru a namítá: „To není pravda, zbývá ještě 19 centimetrů.“ Výška láhve včetně hrdla je 27 centimetrů, válcovitá část láhve má průměr 7 centimetrů (viz obrázek 1). Dno je mírně vyduté, rozměry výdutě ani hrdla neznáme. Víme, že celkový objem láhve je 750 mililitrů. Kolik mililitrů whisky je v láhvi?



Obrázek 1: Rozměry a objem láhve

Řešení. Můžeme si představit, že tvar láhve vznikl z válce o průměru 7 centimetrů a výšce 27 centimetrů odebráním dvou částí – výdutě u dna

[2] Úloha je převzata ze stránky [POW], problém č. 1191.

láhve, jejíž objem v mililitrech označíme V_1, a části kolem hrdla láhve, jejíž objem v mililitrech označíme V_2. Pro přehlednost ještě zaveďme označení $r = 3{,}5$ cm pro poloměr válce. Z informací v zadání lze objem whisky vypočítat dvěma způsoby, přičemž musíme dojít ke stejnému výsledku:

$$14r^2\pi - V_1 = 19r^2\pi - V_2$$

Kromě toho víme, že celkový objem lahve je

$$27r^2\pi - V_1 - V_2 = 750$$

mililitrů (platí 1 ml = 1 cm^3). Předchozí dvě rovnice představují soustavu, ze které můžeme vypočítat

$$V_1 = \frac{539\pi}{4} - 375.$$

Objem whisky v mililitrech je tedy

$$14r^2\pi - V_1 = 375 + \frac{147\pi}{4} \doteq 490{,}45.$$

Ke stejnému výsledku lze ovšem dojít i jednodušším způsobem: Představme si, že by hladina v láhvi byla o 3 centimetry níže, tj. ve výšce 11 centimetrů. V otočené láhvi by pak byla ve výšce 16 centimetrů a nad ní by se nacházela jedenácticentimetrová vrstva vzduchu, která přesně odpovídá zaplněné části v předchozím případě. Whisky i vzduch v láhvi by tedy za této situace měly stejný objem $750/2 = 375$ mililitrů. Skutečný objem whisky získáme přičtením objemu válce o poloměru r a výšce 3 centimetry:

$$375 + 3r^2\pi \doteq 490{,}45.$$

Úloha 3. [3] Běžec a cyklista startují ze stejného místa na závodní dráze. Cyklista projede jeden okruh a chvíli poté dožene běžce. V tomto okamžiku se otočí a pokračuje opačným směrem. Běžce potká přesně v místě, ze kterého oba startovali. Kolikrát je cyklista rychlejší než běžec?

Řešení. Předpokládejme, že jeden okruh má délku L, běžcova rychlost je v a cyklistova rychlost V; chceme vypočítat poměr rychlostí V/v. V čase, kdy cyklista dožene běžce, má běžec za sebou vzdálenost Lx, kde $x \in (0, 1)$, zatímco cyklista urazil vzdálenost $L + Lx$. Platí tedy

$$\frac{V}{v} = \frac{L + Lx}{Lx} = \frac{1}{x} + 1.$$

[3] Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 167.

V okamžiku, kdy se oba závodníci setkají opět na startu, má běžec za sebou vzdálenost L a cyklista urazil vzdálenost $L + 2Lx$. Platí tedy

$$\frac{V}{v} = \frac{L + 2Lx}{L} = 1 + 2x.$$

Z předchozích dvou vztahů plyne

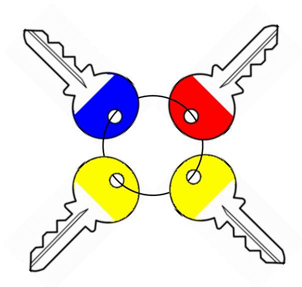
$$\frac{1}{x} + 1 = 1 + 2x$$

a po úpravě $x = 1/\sqrt{2}$. Odtud již snadno vypočteme

$$\frac{V}{v} = \frac{1}{x} + 1 = \sqrt{2} + 1 \doteq 2{,}4,$$

tj. cyklista je zhruba 2,4krát rychlejší než běžec.

Úloha 4. [4] Máme svazek klíčů, které potřebujeme odlišit barevnými rozlišovači. Chceme, aby každý klíč bylo možné jednoznačně identifikovat pouze na základě barev, a to i v případě, že svazek obrátíme. Např. k rozlišení čtyř klíčů stačí tři barvy, viz obrázek 2. Jaký minimální počet barev je potřeba k rozlišení 20 klíčů?



Obrázek 2: K rozlišení čtyř klíčů stačí tři barvy, např. žlutá (spodní dva klíče), červená (vpravo nahoře) a modrá (vlevo nahoře). Modrý a červený klíč jsou jednoznačně určeny svou barvou. Žlutý klíč lze charakterizovat informací o tom, zda sousedí s modrým, nebo červeným klíčem.

Řešení. Označíme-li symbolem $K(n)$ minimální počet barev potřebný k rozlišení n klíčů, snadno si rozmyslíme, že platí $K(1) = 1$, $K(2) = 2$, $K(3) = 3$, $K(4) = 3$. Trochu pracnější je zjistit, že $K(5) = 3$; lze použít

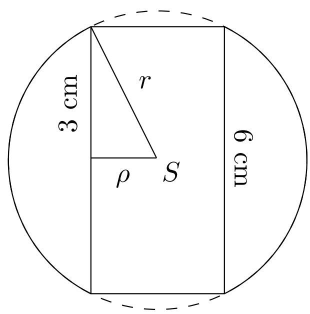
[4] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 139. Lze ji najít i na stránce [POW], problém č. 1177, kde autor navíc formuluje obecnější problém v řeči teorie grafů.

např. barevné schéma ČČŽČM, kde Č značí červenou, Ž žlutou a M modrou barvu.

Je překvapivé, že pro $n \geq 6$ platí $K(n) = 2$, tj. pro šest a více klíčů stačí pouze 2 barvy! Dokazuje to např. barevné schéma ČŽČČŽŽŽŽŽ.... Šestici klíčů ČŽČČŽŽ lze použít ke stanovení orientace; svazek klíčů vždy můžeme položit např. tak, aby těchto šest klíčů ČŽČČŽŽ následovalo po sobě ve směru pohybu hodinových ručiček. Libovolný klíč je pak jednoznačně identifikován svou pozicí vzhledem k prvnímu červenému klíči.

Úloha 5. [5] Provrtáním koule vznikl otvor ve tvaru válce o výšce 6 cm. Jaký je objem zbývající části koule?

Řešení. Označme poloměr koule v centimetrech písmenem r. Z Pýthagorovy věty plyne, že poloměr válcového otvoru je $\rho = \sqrt{r^2 - 9}$ cm; viz obrázek 3.



Obrázek 3: Koule s vyvrtaným otvorem ve tvaru válce. Střed koule je v bodě S, její poloměr je r

Vyvrtáním otvoru byly z koule odstraněny i dvě kulové úseče; každá z nich má výšku $v = (r - 3)$ cm a poloměr ρ, její objem je proto

$$\frac{\pi}{6}v(3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi}{6}(r-3)(3(r^2-9) + (r-3)^2) = \frac{\pi}{6}(r-3)^2(4r+6)$$

(použili jsme vzorec pro objem kulové úseče). Objem části koule zbývající po vyvrtání otvoru získáme, když od celkového objemu koule odečteme objem válce a obou kulových úsečí:

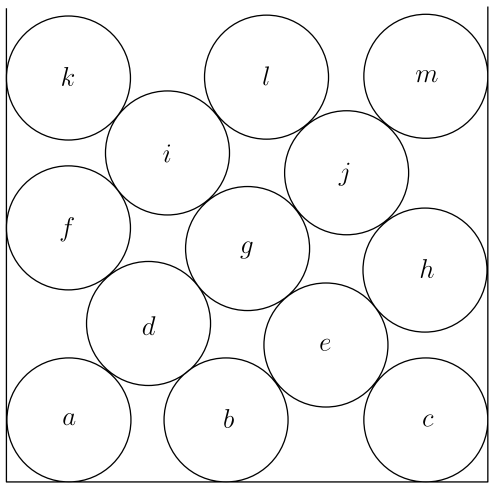
$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi(r^2-9) - 2\cdot\frac{\pi}{6}(r-3)^2(4r+6) = \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(r-3)\left(6(r+3) + \frac{1}{3}(r-3)(4r+6)\right) = \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(r-3)\left(\frac{4}{3}r^2 + 4r + 12\right) = \end{aligned}$$

[5] Úloha je převzata z knihy [Ga], problém č. 14.

$$= \pi \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{4}{3}r^3 - 4r^2 - 12r + 4r^2 + 12r + 36 \right) = 36\pi$$

Vidíme, že objem zbývající části koule nezávisí na jejím poloměru a je roven 36π cm^3.

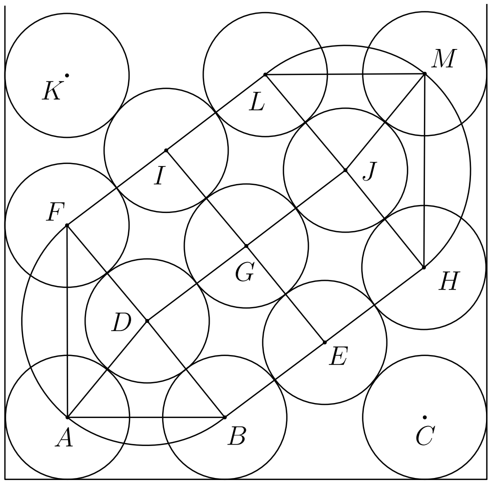
Úloha 6. [6] V krabici je položeno 13 láhví, jejichž kruhová dna vidíme na obrázku 4. Předpokládáme, že láhve a, c, f, h, k, m se dotýkají stěn krabice. Dokažte, že středy kružnic k, l, m leží na přímce, která je rovnoběžná s dnem krabice. Všechny kružnice mají stejný poloměr a předpokládáme, že vzdálenost středů a, b i vzdálenost středů b, c je menší než čtyřnásobek tohoto poloměru.



Obrázek 4: 13 láhví v krabici

Řešení. Označme středy kružnic velkými písmeny tak, jako na obrázku 5. Nechť r je společný poloměr všech kružnic. Kružnice se středem D a poloměrem $2r$ prochází body B, A, F. Zároveň jde o Thalétovu kružnici nad průměrem BF, neboť úsečka BF je z bodu A vidět pod pravým úhlem. Bod D tedy leží na úsečce BF. Čtyřúhelníky $BDGE$ a $EGJH$ mají všechny strany stejně dlouhé, jde tedy o rovnoběžníky. Úsečka HJ je proto rovnoběžná s BD a JL je rovnoběžná s DF. Body H, J, L tudíž leží na jedné přímce. Kružnice se středem J a poloměrem $2r$ prochází

[6] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 44. V článku [Po] lze najít odkazy na související literaturu a důkaz obecnější verze: Je-li na dně krabice n láhví, pak středy kružnic v $(2n-1)$-ní řadě leží na přímce rovnoběžné se dnem krabice. Úloha a její varianty jsou pěkně rozebrány též na stránce [Bo].



Obrázek 5: Pomocné konstrukce použité v řešení úlohy o láhvích v krabici

body H, M, L. Zároveň jde o Thalétovu kružnici nad průměrem LH, proto je úhel HML pravý. Protože HM je rovnoběžná se svislou stěnou krabice, musí být LM rovnoběžná s dnem krabice. Podobně se dokáže, že i KL je rovnoběžná s dnem krabice.

Úloha 7. [7] Najděte deseticiferné číslo $n = a_0a_1 \dots a_9$ takové, že a_0 je počet nul v desítkovém zápise n, a_1 je počet jedniček, …, a_9 je počet devítek.

Řešení. Protože cifra a_i se shoduje s počtem číslic i v desítkovém zápise čísla n, které je deseticiferné, musí platit $a_0+\cdots+a_9 = 10$, neboli ciferný součet čísla n je 10.

Jelikož a_0 odpovídá počtu nul, platí $a_0 \neq 0$ (možnost $a_0 = 0$ vede ihned ke sporu) a některé z cifer $a_1, \dots, a_9$ jsou tedy nuly; řekněme, že p z nich je nenulových. Celkový počet nenulových cifer včetně a_0 je tedy $p + 1$. Protože a_1 je počet jedniček, a_2 je počet dvojek atd., musí platit $p + 1 = a_1 + \cdots + a_9$.

Ukázali jsme, že mezi $a_1, \dots, a_9$ je p nenulových cifer se součtem $p+1$. To nastává právě tehdy, když jedna z cifer je dvojka a všechny ostatní nenulové cifry jsou jedničky. Vidíme tedy, že $a_2 = 1$. Číslo n tím pádem obsahuje aspoň jednu jedničku (cifru a_2). Pokud by byla právě jedna, platilo by $a_1 = 1$ a dostali bychom tak druhou jedničku, což je spor.

[7] Tuto úlohu lze najít v mnoha zdrojích, např. v článku [Kh]. Autorka používá termín *autobiografické číslo*, neboť jde o číslo, které popisuje samo sebe. V článku je uvažována obecnější verze úlohy, kde hledané číslo může mít méně než 10 cifer.

Zároveň víme, že počet jedniček a_1 nemůže být větší než 2. Zbývá tedy pouze možnost $a_1 = 2$. Mezi zbývajícími sedmi ciframi $a_3, \ldots, a_9$ pak musí být ještě jedna jednička a šest nul. Odtud plyne $a_0 = 6$ a následně $a_6 = 1$. Ukázali jsme, že úloha má právě jedno řešení

$$n = 6\,210\,001\,000.$$

Úloha 8. [8] Najděte devíticiferné číslo $n = a_1 \ldots a_9$, které obsahuje každou z cifer $1, \ldots, 9$ právě jednou a navíc pro každé $i \in \{1, \ldots, 9\}$ platí, že $a_1 \ldots a_i$ je dělitelné číslem i.

Řešení. Ciferný součet čísla tvořeného ciframi $1, \ldots, 9$ je 45 a každé takové číslo je automaticky dělitelné devíti. Aby bylo $a_1a_2a_3a_4a_5$ dělitelné pěti, musí být $a_5 = 5$. Dále je zřejmé, že a_2, a_4, a_6, a_8 jsou sudá, a tedy a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 jsou lichá. Navíc číslo $a_1 + a_2 + a_3$ je dělitelné třemi a $a_4 + 5 + a_6$ je rovněž dělitelné třemi. Tudíž $a_4 + a_6$ je součet dvou různých sudých čísel, který při dělení třemi dává zbytek 1; takové dvojice jsou pouze 2, 8 a 4, 6. Trojice $a_4a_5a_6$ je tedy některé z čísel 258, 456, 654, 852. Možnosti 456 a 852 nevedou k cíli, neboť a_3 je liché a poslední dvojčíslí $a_1a_2a_3a_4$ by nebylo dělitelné čtyřmi.

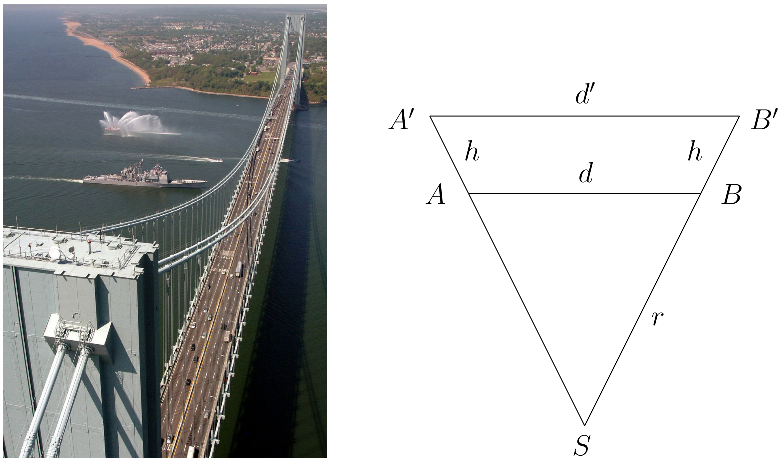
Jestliže $a_4a_5a_6 = 258$, pak $a_2 = 4$ a $a_8 = 6$, nebo naopak; v úvahu tedy připadají devíticiferná čísla 147 258 369, 147 258 963, 741 258 369, 741 258 963, 369 258 147, 369 258 741, 963 258 147, 963 258 741. Případy, kdy $a_6a_7a_8$ je 836, 814 nebo 874, můžeme vyloučit, neboť poslední trojčíslí v $a_1 \ldots a_8$ by nebylo dělitelné osmi. Ani zbývající čísla 147 258 963 a 741 258 963 nevyhovují, neboť jejich první sedmičíslí nejsou dělitelná sedmi.

Zbývá vyšetřit možnost $a_4a_5a_6 = 654$. Poslední trojčíslí v $a_1 \ldots a_8$, což je $4a_7a_8$, má být dělitelné osmi, odkud plyne, že a_7a_8 je buď 32, nebo 72. V každém případě víme, že $a_2 = 8$, a v úvahu tak připadají devíticiferná čísla 987 654 321, 789 654 321, 381 654 729, 183 654 729, 981 654 327, 189 654 327, 981 654 723, 189 654 723. Sedmi je dělitelné jediné z nich, 381 654 729. Úloha má tedy právě jedno řešení.

Úloha 9. [9] Nejdelším visutým mostem ve Spojených státech amerických je Verrazzano-Narrows Bridge, který spojuje newyorské městské části Staten Island a Brooklyn. Centrální část mostu je ohraničena dvěma stejně vysokými věžemi, jejichž paty jsou od sebe vzdáleny 1298 metrů, zatímco vrcholky věží jsou od sebe zhruba o 41,28 milimetru dále. Jak vysoké jsou věže?

[8] Úloha je převzata z knihy [KVW], problém č. 84.

[9] Úloha je s úpravami převzata z knihy [Si], problém č. 127; informace čerpány též ze stránky `https://en.wikipedia.org/wiki/Verrazzano-Narrows_Bridge`.



Obrázek 6: Fotografie Verrazzano-Narrows Bridge a schéma znázorňující střed Země S a věže AA', BB'

Řešení. Skutečnost, že vrcholky věží jsou od sebe dále než jejich paty, je způsobena zakřivením Země – věže tedy nejsou rovnoběžné! Předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru $r = 6378 \cdot 10^3$ m. Dále vyjdeme ze schematického obrázku 6, kde S značí střed Země, body A, B jsou paty věží ve vzdálenosti $d = 1298$ m, body A', B' jsou vrcholky věží ve vzdálenosti $d' = (1298 + 41{,}28 \cdot 10^{-3})$ m a h je výška věží. Z podobnosti trojúhelníků SAB a $SA'B'$ vyplývá

$$\frac{d'}{d} = \frac{r+h}{r},$$

odkud vypočítáme

$$h = r\frac{d'}{d} - r = r\frac{d'-d}{d} = 6378 \cdot 10^3 \cdot \frac{41{,}28 \cdot 10^{-3}}{1298} \text{ m} \doteq 203 \text{ m}.$$

Vypočtená přibližná hodnota se poměrně dobře shoduje se skutečnou výškou věží, která činí 207 m.[10]

Úloha 10. [11] V jedné vesnici žijí pekař, kovář a hrnčíř. Od pekařovy manželky jsem se dozvěděl, že se jedná o pana Pekaře, pana Kováře a pana Hrnčíře, ale že povolání každého z těchto pánů je odlišné od jeho

[10]Odchylka vypočtené a skutečné výšky může být způsobena ne zcela přesnou hodnotou d' či skutečností, že Země není dokonalá koule. Hodnota d' je převzata z Wikipedie a není jasné, zda byla získána měřením, nebo výpočtem.

[11]Úloha je převzata z knihy [Si], problém č. 108.

příjmení. Pekařova manželka mi navíc prozradila: „Od paní Kovářové vím, že každý z nich se oženil se sestrou některého ze zbývajících dvou pánů. Je přitom zajímavé, že příjmení žádné z nastávajících manželek se neshodovalo s povoláním jejího budoucího manžela!“ Jaké je rodné příjmení kovářovy manželky?

Řešení. Podle zadání se příjmení žádného pána neshoduje s jeho povoláním a samozřejmě ani s rodným příjmením jeho manželky; to se navíc nikdy neshoduje s povoláním. Musí tedy nastat jedna ze dvou následujících možností:

příjmení	**povolání**	**rodné příjmení manželky**
Pekař	kovář	Hrnčířová
Kovář	hrnčíř	Pekařová
Hrnčíř	pekař	Kovářová

příjmení	**povolání**	**rodné příjmení manželky**
Pekař	hrnčíř	Kovářová
Kovář	pekař	Hrnčířová
Hrnčíř	kovář	Pekařová

Mohlo by se zdát, že mezi těmito variantami nelze rozhodnout. Ze zadání však víme, že paní Kovářová (což je její současné příjmení) hovořila s pekařovou manželkou, musí tedy jít o dvě různé osoby. Druhá z výše uvedených tabulek této podmínce nevyhovuje (pekařem je pan Kovář a jeho manželka je tudíž paní Kovářová), proto je správně první tabulka a rodné příjmení kovářovy manželky je Hrnčířová.

Literatura

[Bo] A. Bogomolny: *Bottles in a Wine Rack* [online]. Dostupné z: `www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/BallsInJar.shtml`.

[Ga] M. Gardner: *Jakou barvu má medvěd? Nejlepší matematické a logické hádanky.* Portál, 2017.

[Kh] T. Khovanova: *A story of storytelling numbers.* Math Horizons 17 (2009), 14–17.

[KVW] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon: *Which way did the bicycle go? ... and other intriguing mathematical mysteries.* The Mathematical Association of America, 1996.

[Po] B. Polster: *Stacking wine bottles revisited.* The Mathematical Intelligencer 37 (2015), 43–51.

[POW] *Macalester College Problem of the Week* [online]. Dostupné z: `stanwagon.com/potw`.

[Si] D. Singmaster: *Problems for metagrobologists. A collection of puzzles with real mathematical, logical or scientific content.* World Scientific, 2016.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`