

## 2. SYMBOLICKÁ MATEMATIKA, ŘEŠENÍ ROVNIC

Zjednodušení výrazu: `Simplify[výraz]` `FullSimplify[výraz]`

Vyhodnocení s dodatečnými předpoklady: `Assuming[předpoklad,výraz]`

Roznásobení výrazu: `Expand[výraz]` `ExpandAll[výraz]`

Převedení na společného jmenovatele: `Together[výraz]`

Rozklad na parciální zlomky: `Apart[racionální funkce]`

Rozklad na součin: `Factor[výraz]`

Úpravy goniometrických výrazů: `TrigExpand[výraz]` `TrigReduce[výraz]`

Derivace: `D[funkce,proměnná]` `D[funkce,{proměnná,řád}]` `D[funkce,proměnná1,proměnná2,...]`

Primitivní funkce, integrál: `Integrate[funkce,proměnná]` `Integrate[funkce,{proměnná,min,max}]`

Rovnice se v Mathematice zapisují ve tvaru levá strana==pravá strana.

Řešení rovnice: `Solve[rovnice,neznámá]`

Soustava rovnic: `Solve[{rovnice1,rovnice2,...},{neznámá1,neznámá2,...}]`

Chceme-li rovnice řešit v tělese  $\mathbf{Z}_p$  ( $p$  prvočíslo), použijeme volbu `Modulus->p`.

`Solve` se hodí zejména pro řešení algebraických rovnic. Funkce `Reduce`, která má stejnou syntaxi jako `Solve`, umí řešit i některé transcendentní rovnice, případně nerovnice.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá]` hledá řešení v oboru komplexních čísel.

`Reduce[rovnice nebo nerovnice,neznámá,Reals]` hledá jen reálná řešení (místo `Reals` může být `Rationals`, `Integers`, `PositiveIntegers`, ...).

`FindRoot` se používá k numerickému řešení rovnice se zadaným počátečním odhadem.

Jedna rovnice: `FindRoot[rovnice,{neznámá,odhad}]`

Soustava: `FindRoot[{rovnice1,rovnice2,...},{neznámá1,odhad1},{neznámá2,odhad2,...}]`

Řešení rekurentní rovnice pro posloupnost  $\{a_n\}$ : `RSolve[rovnice,a[n],n]`

Soustava rekurentních rovnic: `RSolve[{rovnice1,rovnice2,...},{a[n],b[n],...},n]`

`RSolve` umí najít obecné řešení rekurentní rovnice, nebo řešení splňující jisté počáteční podmínky; ty se zapisují také mezi rovnice (např. `a[0]==1`).

## CVIČENÍ

1. Roznásobte součin  $(x + y)^5(x + y + z)^2$ .
2. Necht  $n$  je přirozené číslo. Vyjádřete

$$\frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n}$$

v co nejjednodušším tvaru.

3. Rozložte racionální funkci  $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$  na parciální zlomky.
4. Sestavte tabulku vzorců pro  $\sin(nx)$ ,  $n \in \{2, 3, \dots, 10\}$  (použijte `TrigExpand`, `Table`, `TableForm`).
5. Vypočítejte derivaci funkce  $f(x) = (x^3 + 6x^5)/(2(1 - x^3))$ , výsledek zjednodušte. Najděte primitivní funkci k této derivaci. Zdůvodněte, proč je nalezený výsledek správný (vypočítejte rozdíl získané funkce a  $f$ ).
6. Vypočítejte  $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos x} \, dx$ .
7. Najděte přesné hodnoty všech kořenů polynomu  $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$ .
8. Vyřešte rovnici  $\sqrt{x} = 1 - x$ .
9. Najděte řešení soustavy rovnic  $x = y + 1$ ,  $y^2 = z$ ,  $x + z = 7$ .
10. Vyřešte v tělese  $\mathbf{Z}_7$  rovnici  $2x = 5$ .
11. V oboru reálných čísel vyřešte rovnici  $|x - 1| + |2x + 2| = 5$ .
12. V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici  $|(x - 1)/(x + 7)| > 3$ .
13. Vyřešte kvadratickou rovnici  $ax^2 + bx + c = 0$  pomocí `Solve` a `Reduce`, porovnejte výsledky.
14. Najděte přibližnou hodnotu řešení rovnice  $\sin x + \cos x = x$ . Použijte funkci `FindRoot`, počáteční odhad můžete získat z grafu funkce  $\sin x + \cos x - x$ , který vykreslíte pomocí `Plot[Sin[x]+Cos[x]-x, {x, -10, 10}]`.
15. Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1$ ,  $a_0 = 0$ .
16. Délka elipsy s poloosami o velikostech  $a$ ,  $b$  je dána integrálem  $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt$ ; tento integrál lze počítat pouze numericky. Povrch Země lze dobře aproximovat plochou, která vznikne rotací elipsy s poloosami  $a \doteq 6378$  km (vzdálenost od středu k rovníku) a  $b \doteq 6357$  km (vzdálenost od středu k pólu) kolem osy. Porovnejte délku cesty kolem světa podél rovníku (kružnice) a podél libovolného poledníku (elipsa).
17. Počet způsobů, jak rozměnit stokorunu pomocí pětikorun, desetikorun a dvacetikorun, je roven koeficientu u  $x^{100}$  v součinu

$$(1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100})(1 + x^{10} + x^{20} + \dots + x^{100})(1 + x^{20} + x^{40} + \dots + x^{100})$$

(víte, proč to platí?). Vypočítejte jej! V případě vyšších obnosů je zjišťování koeficientu roznásobením nepraktické, lepší je využít funkci `Coefficient[výraz, x, n]`, která vrací hodnotu koeficientu u  $x^n$  v zadaném výrazu. Vyzkoušejte se zadáním modifikovaným pro částku 1000 Kč.

18. Najděte v dokumentaci funkce pro dělení polynomů (hledejte v sekci *Polynomial Algebra*). Vypočítejte podíl a zbytek při dělení  $(3x^2 + 15x + 18) : (x^2 + 3x + 2)$ .
19. Vyřešte následující úlohu převzatou z matematické olympiády: Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.  
*Návod:* Řešte vhodnou soustavu rovnic v oboru přirozených čísel (`PositiveIntegers`).
20. Najděte přesné hodnoty všech kořenů polynomu  $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$ .  
*Návod:* Pokuste se v dokumentaci k `Solve` zjistit, jak nalézt řešení rovnice 4. stupně „v radikálech“, tj. pomocí odmocnin.