

Matematická analýza V – požadavky ke zkoušce (ZS 2024/25)

1. Teorie míry

Vnější Lebesgueova míra a její vlastnosti (definice a věta s důkazem). Lebesgueovsky měřitelné množiny a Lebesgueova míra (definice). Otevřené a nulové množiny jsou měřitelné, posunutí měřitelné množiny je měřitelná množina (tři věty s důkazem). Spočetné sjednocení lebesgueovsky měřitelných množin je lebesgueovsky měřitelná množina (důkaz). Uzavřené množiny jsou lebesgueovsky měřitelné (bez důkazu). Doplněk lebesgueovsky měřitelné množiny je lebesgueovsky měřitelný (bez důkazu), Lebesgueova míra je σ -aditivní (důkaz včetně lemmatu). σ -algebry a jejich vlastnosti (definice a věta s důkazem), prostory s mírou a jejich vlastnosti (definice a věta s důkazem).

2. Měřitelné funkce

Měřitelné funkce (definice), ekvivalentní definice měřitelnosti (věta s důkazem). Měřitelnost spojitě funkce a složené funkce (dvě věty s důkazem). Operace, které zachovávají měřitelnost funkcí (dvě věty s důkazem). Infimum a suprémum posloupnosti měřitelných funkcí jsou měřitelné (důkaz), limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná (bez důkazu).

3. Lebesgueův integrál

Jednoduchá funkce (definice) a její měřitelnost (věta s důkazem), integrál jednoduché nezáporné funkce (definice) a jeho vlastnosti (věta s důkazem). Integrál nezáporné měřitelné funkce (definice) a jeho vlastnosti (věta s důkazem). Leviho věta pro neklesající posloupnosti nezáporných funkcí (důkaz). Aproximace nezáporné měřitelné funkce jednoduchými funkcemi (věta s důkazem). Integrál ze součtu funkcí (věta s důkazem). Leviho věta o záměně pořadí sumy a integrálu (důkaz). Integrál obecné měřitelné funkce (definice), nutné a postačující podmínky pro konvergenci integrálu (důkaz), odhad absolutní hodnoty integrálu (důkaz). Vlastnosti Lebesgueova integrálu: integrace přes nulové množiny, integrál násobku a součtu, monotonie integrálu (čtyři věty s důkazy). Integrál z komplexní funkce (definice) a odhad jeho absolutní hodnoty (věta s důkazem). Integrace funkcí vzhledem k aritmetické míře (věta s důkazem). Pojem „skoro všude“ a související výsledky (tři věty s důkazem). Konvergence integrálu – srovnávací a limitní srovnávací kritérium (dvě věty s důkazem). Leviho věta o monotónní konvergenci – obecná verze (důkaz), Fatouovo lemma (bez důkazu), Lebesgueova věta o dominované konvergenci (důkaz), Lebesgueova věta o záměně pořadí sumy a integrálu (důkaz). Derivace integrálu podle parametru (věta s důkazem). Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu (věta bez důkazu). Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu pro funkce neměnní znaménko (důkaz), další věty o vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu (bez důkazu).

Fubiniova věta pro nezáporné funkce a pro obecné funkce (dvě věty bez důkazu). Věta o substituci pro otevřené množiny (náznak důkazu pro spojitě funkce) a pro obecné množiny (bez důkazu).

Bez znalosti definic a schopnosti je ilustrovat na příkladech nelze úspěšně složit zkoušku. Důkazům je nutné rozumět, tj. umět odůvodnit jednotlivé kroky (nikoliv je pouze znát z paměti).