

# Lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

- Znat obecný tvar homogenní lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty
- Vědět, v jakém tvaru lze hledat vzorec pro  $n$ -tý člen
- Umět metodu použít k řešení konkrétních úloh

# Polynomy a jejich kořeny

**Věta.** Mějme polynomy

$$Q(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m,$$

$$Q^*(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_0,$$

kde  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$  a  $\alpha_0, \alpha_m \neq 0$ .

Pokud  $Q$  má kořeny (ne nutně různé)  $z_1, \dots, z_m$ , pak  $Q^*$  má kořeny  $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_m}$ .

# Polynomy a jejich kořeny

**Věta.** Mějme polynomy

$$Q(z) = \alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m-1} + \cdots + \alpha_m,$$
$$Q^*(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_0,$$

kde  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$  a  $\alpha_0, \alpha_m \neq 0$ .

Pokud  $Q$  má kořeny (ne nutně různé)  $z_1, \dots, z_m$ , pak  $Q^*$  má kořeny  $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_m}$ .

**Důkaz.** Kořenové činitele:  $Q(z) = \alpha_0(z - z_1) \cdots (z - z_m)$ .

Pro  $z \neq 0$  platí

$$\begin{aligned} Q^*(z) &= z^m(\alpha_m + \alpha_{m-1}/z + \cdots + \alpha_0/z^m) = z^m Q(1/z) = \\ &= z^m \alpha_0 (1/z - z_1) \cdots (1/z - z_m) = \alpha_0 (1 - z z_1) \cdots (1 - z z_m) = \\ &= \alpha_0 z_1 \cdots z_m (1/z_1 - z) \cdots (1/z_m - z). \end{aligned}$$

Pro  $z = 0$  se obě strany rovnají  $\alpha_0$ . Máme rozklad  $Q^*$  na kořenové činitele a vidíme, že  $Q^*$  má kořeny  $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_m}$ .

# Lineární rekurentní rovnice (1)

V předchozí přednášce jsme vyřešili rekurentní rovnice

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

kde  $n$ -tý člen je lineární kombinací předchozích dvou členů.

# Lineární rekurentní rovnice (1)

V předchozí přednášce jsme vyřešili rekurentní rovnice

$$\begin{aligned}F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2, \\a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & n \geq 2,\end{aligned}$$

kde  $n$ -tý člen je lineární kombinací předchozích dvou členů.

Obecnější případ, kdy  $n$ -tý člen je lineární kombinací předchozích  $k$  členů:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat  $\alpha_k \neq 0$  (jinak vynecháme poslední sčítanec).

Aby byla posloupnost  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  určena jednoznačně, je třeba zadat počáteční členy  $a_0, \dots, a_{k-1}$ .

# Lineární rekurentní rovnice (2)

Rovnice

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k,$$

se nazývá lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty.

Slovo „lineární“ vyjadřuje skutečnost, že na pravé straně rovnice vystupuje lineární kombinace. Obecněji se studují i nehomogenní lineární rovnice

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} + b,$$

a rovnice s nekonstantními koeficienty, kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  nejsou konstanty, ale funkce proměnné  $n$ .

# Řešení rekurentní rovnice (1)

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k.$$

Hledáme řešení metodou generujících funkcí,  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

# Řešení rekurentní rovnice (1)

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k.$$

Hledáme řešení metodou generujících funkcí,  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (a_0, \dots, a_{k-1}, \alpha_1 a_{k-1} + \cdots + \alpha_k a_0, \alpha_1 a_k + \cdots + \alpha_k a_1, \dots) =$$

$$= (a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots) + \alpha_1 \underbrace{(0, \dots, 0, a_{k-1}, a_k, \dots)}_{k\text{-krát}} + \cdots +$$

$$+ \alpha_k \underbrace{(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)}_{k\text{-krát}} =$$

$$= \alpha_1 (0, a_0, a_1, \dots) + \cdots + \alpha_k \underbrace{(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)}_{k\text{-krát}} + (b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, 0, \dots),$$

kde  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$  jsou vhodná čísla (jejich hodnoty lze vypočítat, např.  $b_0 = a_0$ ,  $b_1 = a_1 - \alpha_1 a_0$ , atd., ale nebudeme je potřebovat).

# Řešení rekurentní rovnice (1)

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k}, \quad n \geq k.$$

Hledáme řešení metodou generujících funkcí,  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (a_0, \dots, a_{k-1}, \alpha_1 a_{k-1} + \dots + \alpha_k a_0, \alpha_1 a_k + \dots + \alpha_k a_1, \dots) =$$

$$= (a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots) + \underbrace{\alpha_1 (0, \dots, 0, a_{k-1}, a_k, \dots)}_{k\text{-krát}} + \dots +$$

$$+ \alpha_k \underbrace{(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)}_{k\text{-krát}} =$$

$$= \alpha_1 (0, a_0, a_1, \dots) + \dots + \alpha_k \underbrace{(0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)}_{k\text{-krát}} + (b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, 0, \dots),$$

kde  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$  jsou vhodná čísla (jejich hodnoty lze vypočítat, např.  $b_0 = a_0$ ,  $b_1 = a_1 - \alpha_1 a_0$ , atd., ale nebudeme je potřebovat).

$$A(z) = \alpha_1 z A(z) + \alpha_2 z^2 A(z) + \dots + \alpha_k z^k A(z) + b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}$$

# Řešení rekurentní rovnice (2)

$$A(z) = \alpha_1 z A(z) + \alpha_2 z^2 A(z) + \dots + \alpha_k z^k A(z) + b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}$$

$$A(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k}$$

## Řešení rekurentní rovnice (2)

$$A(z) = \alpha_1 z A(z) + \alpha_2 z^2 A(z) + \dots + \alpha_k z^k A(z) + b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}$$

$$A(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k}$$

Předpokládejme, že známe kořeny jmenovatele:

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k = -\alpha_k (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_l)^{n_l},$$

kde  $z_1, \dots, z_l$  jsou navzájem různé kořeny s násobnostmi  $n_1, \dots, n_l$  a platí  $n_1 + \dots + n_l = k$ .

# Řešení rekurentní rovnice (2)

$$A(z) = \alpha_1 z A(z) + \alpha_2 z^2 A(z) + \dots + \alpha_k z^k A(z) + b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}$$

$$A(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{k-1} z^{k-1}}{1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k}$$

Předpokládejme, že známe kořeny jmenovatele:

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k = -\alpha_k (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_l)^{n_l},$$

kde  $z_1, \dots, z_l$  jsou navzájem různé kořeny s násobnostmi  $n_1, \dots, n_l$  a platí  $n_1 + \dots + n_l = k$ . Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar

$$A(z) = \frac{c_{1,1}}{z - z_1} + \dots + \frac{c_{1,n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l,1}}{z - z_l} + \dots + \frac{c_{l,n_l}}{(z - z_l)^{n_l}}.$$

## Řešení rekurentní rovnice (3)

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{c_{1,1}}{z - z_1} + \dots + \frac{c_{1,n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l,1}}{z - z_l} + \dots + \frac{c_{l,n_l}}{(z - z_l)^{n_l}} = \\ &= \frac{d_{1,1}}{1 - z/z_1} + \dots + \frac{d_{1,n_1}}{(1 - z/z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{d_{l,1}}{1 - z/z_l} + \dots + \frac{d_{l,n_l}}{(1 - z/z_l)^{n_l}}, \end{aligned}$$

kde  $d_{i,j} = c_{i,j}/(-z_i)^j$ . Koeficienty  $c_{i,j}$  a  $d_{i,j}$  neznáme, ale nebudeme je potřebovat.

# Řešení rekurentní rovnice (3)

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{c_{1,1}}{z - z_1} + \dots + \frac{c_{1,n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{c_{l,1}}{z - z_l} + \dots + \frac{c_{l,n_l}}{(z - z_l)^{n_l}} = \\ &= \frac{d_{1,1}}{1 - z/z_1} + \dots + \frac{d_{1,n_1}}{(1 - z/z_1)^{n_1}} + \dots + \frac{d_{l,1}}{1 - z/z_l} + \dots + \frac{d_{l,n_l}}{(1 - z/z_l)^{n_l}}, \end{aligned}$$

kde  $d_{i,j} = c_{i,j}/(-z_i)^j$ . Koeficienty  $c_{i,j}$  a  $d_{i,j}$  neznáme, ale nebudeme je potřebovat.

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{1,1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} d_{1,n_1} \binom{n + n_1 - 1}{n_1 - 1} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} d_{l,1} \left(\frac{z}{z_l}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} d_{l,n_l} \binom{n + n_l - 1}{n_l - 1} \left(\frac{z}{z_l}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_1(n) \left(\frac{z}{z_1}\right)^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} P_l(n) \left(\frac{z}{z_l}\right)^n, \end{aligned}$$

kde  $P_i(n) = d_{i,1} + \dots + d_{i,n_i} \binom{n+n_i-1}{n_i-1}$  pro každé  $i \in \{1, \dots, l\}$ .

# Řešení rekurentní rovnice (4)

Pokud se na kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!}$$

díváme jako na funkci proměnné  $n$ , pak se jedná o polynom stupně  $k$ .

# Řešení rekurentní rovnice (4)

Pokud se na kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdots (n - k + 1)}{k!}$$

díváme jako na funkci proměnné  $n$ , pak se jedná o polynom stupně  $k$ . Tedy pro každé  $i \in \{1, \dots, l\}$  je

$$P_i(n) = d_{i,1} + \cdots + d_{i,n_i} \binom{n + n_i - 1}{n_i - 1}$$

polynom stupně nejvýše  $n_i - 1$ .

# Řešení rekurentní rovnice (4)

Pokud se na kombinační číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!}$$

díváme jako na funkci proměnné  $n$ , pak se jedná o polynom stupně  $k$ . Tedy pro každé  $i \in \{1, \dots, l\}$  je

$$P_i(n) = d_{i,1} + \dots + d_{i,n_i} \binom{n + n_i - 1}{n_i - 1}$$

polynom stupně nejvýše  $n_i - 1$ .

**Shrnutí:**  $a_n$  je koeficient u  $z^n$  v  $A(z)$ , tedy

$$a_n = \frac{P_1(n)}{z_1^n} + \dots + \frac{P_l(n)}{z_l^n},$$

kde  $z_1, \dots, z_l$  jsou kořeny polynomu

$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k$  s násobnostmi  $n_1, \dots, n_l$  a pro každé  $i \in \{1, \dots, l\}$  je  $P_i$  polynom stupně nejvýše  $n_i - 1$ .

# Řešení rekurentní rovnice (5)

Převrácené hodnoty kořenů  $z_1, \dots, z_l$  polynomu

$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k$  jsou kořeny polynomu

$z^k - \alpha_1 z^{k-1} - \alpha_2 z^{k-2} - \dots - \alpha_k$ .

# Řešení rekurentní rovnice (5)

Převrácené hodnoty kořenů  $z_1, \dots, z_l$  polynomu  $1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_k z^k$  jsou kořeny polynomu  $z^k - \alpha_1 z^{k-1} - \alpha_2 z^{k-2} - \dots - \alpha_k$ .

**Věta.** Každé řešení rovnice

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k}$$

má tvar

$$a_n = P_1(n)w_1^n + \dots + P_l(n)w_l^n,$$

kde  $w_1, \dots, w_l$  jsou všechny kořeny polynomu

$$w^k - \alpha_1 w^{k-1} - \alpha_2 w^{k-2} - \dots - \alpha_k,$$

jejichž násobnosti jsou  $n_1, \dots, n_l$ , a pro každé  $i \in \{1, \dots, l\}$  je  $P_i$  polynom stupně nejvýše  $n_i - 1$ .

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  
 $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Lze přepsat do tvaru  $(w - 2)^2 = 0$ , tj.

$$w_1 = 2, \quad n_1 = 2.$$

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Lze přepsat do tvaru  $(w - 2)^2 = 0$ , tj.

$$w_1 = 2, \quad n_1 = 2.$$

Polynom  $P_1$  má stupeň nejvýše  $n_1 - 1 = 1$ , lze jej tedy vyjádřit ve tvaru  $P_1(n) = bn + c$ , kde  $b, c$  jsou zatím neznámé koeficienty. Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .  
Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Lze přepsat do tvaru  $(w - 2)^2 = 0$ , tj.

$$w_1 = 2, \quad n_1 = 2.$$

Polynom  $P_1$  má stupeň nejvýše  $n_1 - 1 = 1$ , lze jej tedy vyjádřit ve tvaru  $P_1(n) = bn + c$ , kde  $b, c$  jsou zatím neznámé koeficienty. Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Koeficienty  $b, c$  nalezneme z podmínek  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$ :

$$3 = (b \cdot 0 + c)2^0 = c, \quad 4 = (b \cdot 1 + c)2^1 = 2(b + c).$$

## Příklady (1)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$  a  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 - 4w + 4 = 0.$$

Lze přepsat do tvaru  $(w - 2)^2 = 0$ , tj.

$$w_1 = 2, \quad n_1 = 2.$$

Polynom  $P_1$  má stupeň nejvýše  $n_1 - 1 = 1$ , lze jej tedy vyjádřit ve tvaru  $P_1(n) = bn + c$ , kde  $b, c$  jsou zatím neznámé koeficienty. Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Koeficienty  $b, c$  nalezneme z podmínek  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 4$ :

$$3 = (b \cdot 0 + c)2^0 = c, \quad 4 = (b \cdot 1 + c)2^1 = 2(b + c).$$

$$\Rightarrow c = 3, b = -1 \quad \Rightarrow a_n = (-n + 3)2^n$$



## Příklady (2)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 2$ ,  
 $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$  a  $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ ,  $n \geq 3$ .

## Příklady (2)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$  a  $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ ,  $n \geq 3$ .

Každý člen závisí na předchozích třech členech:  $k = 3$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^3 + 2w^2 - 4w - 8 = 0.$$

## Příklady (2)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$  a  $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ ,  $n \geq 3$ .

Každý člen závisí na předchozích třech členech:  $k = 3$ .

Hledáme kořeny rovnice

$$w^3 + 2w^2 - 4w - 8 = 0.$$

Lze upravit:

$$w^2(w + 2) - 4(w + 2) = 0$$

$$(w + 2)(w^2 - 4) = 0$$

$$(w + 2)^2(w - 2) = 0$$

$$w_1 = -2, \quad n_1 = 2, \quad w_2 = 2, \quad n_2 = 1.$$

## Příklady (2)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$  a  $a_n = -2a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}$ ,  $n \geq 3$ .

Každý člen závisí na předchozích třech členech:  $k = 3$ .  
Hledáme kořeny rovnice

$$w^3 + 2w^2 - 4w - 8 = 0.$$

Lze upravit:

$$w^2(w + 2) - 4(w + 2) = 0$$

$$(w + 2)(w^2 - 4) = 0$$

$$(w + 2)^2(w - 2) = 0$$

$$w_1 = -2, \quad n_1 = 2, \quad w_2 = 2, \quad n_2 = 1.$$

Polynom  $P_1$  má stupeň nejvýše  $n_1 - 1 = 1$  a polynom  $P_2$  má stupeň nejvýše  $n_2 - 1 = 0$ , tedy  $P_1(n) = bn + c$ ,  $P_2(n) = d$ .  
Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

## Příklady (3)

Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení  $b$ ,  $c$ ,  $d$  využijeme podmínky  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$ :

$$2 = c + d, \quad 6 = (b + c)(-2) + 2d, \quad 0 = (2b + c)4 + 4d$$

## Příklady (3)

Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení  $b$ ,  $c$ ,  $d$  využijeme podmínky  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$ :

$$2 = c + d, \quad 6 = (b + c)(-2) + 2d, \quad 0 = (2b + c)4 + 4d$$

$$2 = c + d,$$

$$3 = d - b - c,$$

$$0 = 2b + c + d.$$

## Příklady (3)

Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení  $b$ ,  $c$ ,  $d$  využijeme podmínky  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$ :

$$2 = c + d, \quad 6 = (b + c)(-2) + 2d, \quad 0 = (2b + c)4 + 4d$$

$$2 = c + d,$$

$$3 = d - b - c,$$

$$0 = 2b + c + d.$$

Odečtením první rovnice od třetí získáme  $b = -1$  a dosazením této hodnoty do druhé rovnice máme  $2 = d - c$ . Z této a první rovnice plyne  $d = 2$ ,  $c = 0$ .

## Příklady (3)

Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = (bn + c)(-2)^n + d2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

K nalezení  $b$ ,  $c$ ,  $d$  využijeme podmínky  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = 0$ :

$$2 = c + d, \quad 6 = (b + c)(-2) + 2d, \quad 0 = (2b + c)4 + 4d$$

$$2 = c + d,$$

$$3 = d - b - c,$$

$$0 = 2b + c + d.$$

Odečtením první rovnice od třetí získáme  $b = -1$  a dosazením této hodnoty do druhé rovnice máme  $2 = d - c$ . Z této a první rovnice plyne  $d = 2$ ,  $c = 0$ .

Řešení rekurentní rovnice je tedy

$$a_n = -n(-2)^n + 2^{n+1}.$$

## Příklady (4)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 1$ ,  
 $a_1 = 0$  a  $a_n = -a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

## Příklady (4)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$  a  $a_n = -a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .  
Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 + 1 = 0.$$

$$w_1 = i, \quad n_1 = 1, \quad w_2 = -i, \quad n_2 = 1.$$

Polynomy  $P_1, P_2$  mají stupeň nejvýše 0, tedy  $P_1(n) = b$ ,  $P_2(n) = c$ , kde  $b, c$  jsou zatím neznámé koeficienty. Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = bi^n + c(-i)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

## Příklady (4)

Najděte vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti splňující  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$  a  $a_n = -a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ .

Každý člen závisí na předchozích dvou členech:  $k = 2$ .  
Hledáme kořeny rovnice

$$w^2 + 1 = 0.$$

$$w_1 = i, \quad n_1 = 1, \quad w_2 = -i, \quad n_2 = 1.$$

Polynomy  $P_1, P_2$  mají stupeň nejvýše 0, tedy  $P_1(n) = b$ ,  $P_2(n) = c$ , kde  $b, c$  jsou zatím neznámé koeficienty. Obecné řešení zadané rekurentní rovnice má tvar

$$a_n = bi^n + c(-i)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Využijeme  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ :

$$1 = b + c$$

$$0 = bi - ci$$

$$\Rightarrow 0 = b - c \Rightarrow b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}i^n + \frac{1}{2}(-i)^n$$