Generující funkce

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Výukové cíle

- Znát definici generující funkce posloupnosti, umět ji ilustrovat na příkladech
- Umět pomocí generujících funkcí odvodit explicitní vzorec pro Fibonacciho čísla
- Ovládat obecný algoritmus pro řešení rekurentních rovnic pomocí generujících funkcí

Mocninné řady (1)

Obecný předpis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Omezíme se na $z_0 = 0$, tj. mocninné řady ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Mocninné řady (1)

Obecný předpis: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Omezíme se na $z_0 = 0$, tj. mocninné řady ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Příklad:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

je geometrická řada s kvocientem z.

Pokud $|z| < 1$, pak součet řady je $\frac{1}{1-z}$.

Mocninné řady (2)

Věta. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n, \quad |z| < 1.$$

Věta. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n, \quad |z| < 1.$$

Důkaz. Indukcí podle k. Pro $k = 1$ platí.

$k \Rightarrow k+1$: Indukční předpoklad (znění věty) derivujeme podle z:

$$\frac{k}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} n z^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)\cdots(n+1)}{(k-1)!} \frac{n}{k} z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

Definice. Je-li dána reálná nebo komplexní posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se nazývá generující funkcí zadané posloupnosti.

Generující funkce

Definice. Je-li dána reálná nebo komplexní posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se nazývá generující funkcí zadané posloupnosti.

V definici se nepředpokládá nic o konvergenci příslušné mocninné řady; může se stát, že konverguje pouze pro $z = 0$.

Příklady generujících funkcí

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$	Generující funkce $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
$(1,0,0,0,\dots)$	1
$(\underbrace{0,\dots,0}_{m\text{-krát}},1,0,\dots)$	z^m
$(1,1,1,1,\dots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
$(1,2,4,8,\dots)$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$
$(1,2,3,4,\dots)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$

Linearita

Jestliže $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$,
pak $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = A(z) + B(z).$$

Linearita

Jestliže $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$,
pak $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = A(z) + B(z).$$

Pro každé číslo c platí, že generující funkce posloupnosti $\{c a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = cA(z).$$

Posouvání posloupností

Mějme libovolné $m \in \mathbb{N}$ a uvažujme posloupnost

$$\{a_{n-m}\}_{n=0}^{\infty} := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-krát}}, a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Její generující funkce je

$$a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \cdots = z^m (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = z^m A(z).$$

Posouvání posloupností

Mějme libovolné $m \in \mathbb{N}$ a uvažujme posloupnost

$$\{a_{n-m}\}_{n=0}^{\infty} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{m\text{-krát}}, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Její generující funkce je

$$a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \cdots = z^m (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = z^m A(z).$$

Posloupnost

$$\{a_{n+m}\}_{n=0}^{\infty} := (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$$

má generující funkci

$$a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \cdots =$$
$$= \frac{1}{z^m} \left(a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + a_{m+2} z^{m+2} + \cdots \right) =$$
$$= \frac{1}{z^m} \left(A(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{m-1} z^{m-1} \right)$$

Fibonacciho čísla (1)

Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti splňující $F_0 = F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pro $n \geq 2$.

Plán: Pokusíme se nejprve najít generující funkci, tu pak rozvineme do mocninné řady a zjistíme koeficient u z^n, čímž získáme hledaný vzorec pro F_n.

Fibonacciho čísla (2)

$$
\begin{aligned}
\{F_n\}_{n=0}^{\infty} &= (1, 1, F_0 + F_1, F_1 + F_2, \ldots) = \\
&= (0, 0, F_0, F_1, \ldots) + (0, 1, F_1, F_2, \ldots) + (1, 0, 0, 0, \ldots) = \\
&= (0, 0, F_0, F_1, \ldots) + (0, F_0, F_1, F_2, \ldots) + (1, 0, 0, 0, \ldots) = \\
&= \{F_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + \{F_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} + (1, 0, 0, 0, \ldots)
\end{aligned}
$$

Fibonacciho čísla (2)

$$\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 1, F_0 + F_1, F_1 + F_2, \dots) =$$
$$= (0, 0, F_0, F_1, \dots) + (0, 1, F_1, F_2, \dots) + (1, 0, 0, 0, \dots) =$$
$$= (0, 0, F_0, F_1, \dots) + (0, F_0, F_1, F_2, \dots) + (1, 0, 0, 0, \dots) =$$
$$= \{F_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + \{F_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} + (1, 0, 0, 0, \dots)$$

Přechod od posloupností k jejich generujícím funkcím:

$$F(z) = z^2 F(z) + zF(z) + 1$$

Fibonacciho čísla (2)

$$\begin{aligned}\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 1, F_0 + F_1, F_1 + F_2, \ldots) = \\ = (0, 0, F_0, F_1, \ldots) + (0, 1, F_1, F_2, \ldots) + (1, 0, 0, 0, \ldots) = \\ = (0, 0, F_0, F_1, \ldots) + (0, F_0, F_1, F_2, \ldots) + (1, 0, 0, 0, \ldots) = \\ = \{F_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + \{F_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} + (1, 0, 0, 0, \ldots)\end{aligned}$$

Přechod od posloupností k jejich generujícím funkcím:

$$F(z) = z^2 F(z) + zF(z) + 1$$

Vypočteme $F(z)$:

$$F(z)(1 - z - z^2) = 1$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{-1}{z^2 + z - 1}$$

Fibonacciho čísla (3)

Racionální funkci $F(z) = \frac{-1}{z^2+z-1}$ rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$z^2 + z - 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Fibonacciho čísla (3)

Racionální funkci $F(z) = \frac{-1}{z^2+z-1}$ rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$z^2 + z - 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rozklad F na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{-1}{z^2 + z - 1} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}.$$

Fibonacciho čísla (3)

Racionální funkci $F(z) = \frac{-1}{z^2+z-1}$ rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$z^2 + z - 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rozklad F na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{-1}{z^2 + z - 1} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}.$$

Násobíme $(z - z_1)(z - z_2)$:

$$-1 = a(z - z_2) + b(z - z_1) = (a + b)z - az_2 - bz_1$$

Porovnání koeficientů:

$$a + b = 0, \quad az_2 + bz_1 = 1$$

Fibonacciho čísla (3)

Racionální funkci $F(z) = \frac{-1}{z^2+z-1}$ rozložíme na parciální zlomky. Platí

$$z^2 + z - 1 = (z - z_1)(z - z_2), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rozklad F na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{-1}{z^2 + z - 1} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}.$$

Násobíme $(z - z_1)(z - z_2)$:

$$-1 = a(z - z_2) + b(z - z_1) = (a + b)z - az_2 - bz_1$$

Porovnání koeficientů:

$$a + b = 0, \quad az_2 + bz_1 = 1$$

$$\Rightarrow b = -a \quad \Rightarrow \quad a(z_2 - z_1) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Fibonacciho čísla (4)

$$
\begin{aligned}
F(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-z_2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\frac{1}{1-z/z_1} - \frac{1}{\sqrt{5}z_2}\frac{1}{1-z/z_2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{1}{\sqrt{5}z_1^{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{5}z_2^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

Koeficient u z^n je F_n.

Fibonacciho čísla (4)

$$\begin{aligned}F(z) &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z-z_2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\frac{1}{1-z/z_1}-\frac{1}{\sqrt{5}z_2}\frac{1}{1-z/z_2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\frac{1}{\sqrt{5}z_1^{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{5}z_2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Koeficient u z^n je F_n.Využijeme $z_1 z_2 = -1$ (Viéte):

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}z_1^{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{5}z_2^{n+1}} = \frac{(-z_2)^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{(-z_1)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Řešení rekurentních rovnic pomocí GF

Obecný postup:

1. Pomocí rekurentní rovnice pro $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ najdi rovnici pro generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
2. Vypočítej z této rovnice $A(z)$.
3. Rozviň $A(z)$ do mocninné řady, vzorec pro a_n je dán koeficientem u z^n.

Příklad (1)

Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti splňující $a_0 = 3$, $a_1 = 4$ a $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

Příklad (1)

Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti splňující $a_0 = 3$, $a_1 = 4$ a $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\{a_n\}_{n=0}^{\infty} &= (3, 4, 4a_1 - 4a_0, 4a_2 - 4a_1, \ldots) = \\
&= 4(0, 0, a_1, a_2, \ldots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \ldots) + (3, 4, 0, 0, \ldots) = \\
&= 4(0, a_0, a_1, a_2, \ldots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \ldots) + (3, -8, 0, 0, \ldots) = \\
&= 4\{a_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} - 4\{a_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + (3, -8, 0, 0, \ldots).
\end{aligned}$$

Příklad (1)

Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti splňující $a_0 = 3$, $a_1 = 4$ a $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (3, 4, 4a_1 - 4a_0, 4a_2 - 4a_1, \dots) = \\ = 4(0, 0, a_1, a_2, \dots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \dots) + (3, 4, 0, 0, \dots) = \\ = 4(0, a_0, a_1, a_2, \dots) - 4(0, 0, a_0, a_1, \dots) + (3, -8, 0, 0, \dots) = \\ = 4\{a_{n-1}\}_{n=0}^{\infty} - 4\{a_{n-2}\}_{n=0}^{\infty} + (3, -8, 0, 0, \dots).\end{aligned}$$

Označíme-li $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pak

$$A(z) = 4zA(z) - 4z^2 A(z) + 3 - 8z$$

$$A(z)(1 - 4z + 4z^2) = 3 - 8z$$

$$A(z) = \frac{-8z + 3}{4z^2 - 4z + 1}$$

Příklad (2)

$$A(z) = \frac{-8z+3}{4z^2-4z+1}$$

Racionální funkce, hledáme rozklad na parciální zlomky.

$$4z^2-4z+1 = 4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (2z-1)^2$$

Příklad (2)

$$A(z) = \frac{-8z+3}{4z^2-4z+1}$$

Racionální funkce, hledáme rozklad na parciální zlomky.

$$4z^2-4z+1 = 4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (2z-1)^2$$

Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$A(z) = \frac{a}{2z-1} + \frac{b}{(2z-1)^2}.$$

Příklad (2)

$$A(z) = \frac{-8z+3}{4z^2-4z+1}$$

Racionální funkce, hledáme rozklad na parciální zlomky.

$$4z^2-4z+1 = 4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = (2z-1)^2$$

Rozklad na parciální zlomky má tvar

$$A(z) = \frac{a}{2z-1} + \frac{b}{(2z-1)^2}.$$

Standardnímu algoritmu pro hledání a, b se lze vyhnout trikem:

$$A(z) = \frac{-8z+3}{(2z-1)^2} = \frac{-8z+4}{(2z-1)^2} - \frac{1}{(2z-1)^2} =$$

$$= \frac{-4(2z-1)}{(2z-1)^2} - \frac{1}{(2z-1)^2} = \frac{4}{1-2z} - \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Příklad (3)

$$A(z) = \frac{4}{1-2z} - \frac{1}{(1-2z)^2}$$

Rozvineme do mocninných řad pomocí vzorců $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ a $\frac{1}{(1-y)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$:

$$A(z) = 4\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(4-(n+1))2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(3-n)2^n z^n$$

Koeficient u z^n je

$$a_n = (3-n)2^n.$$

Poznámka ke konvergenci

Při výpočtech jsme se nestarali o konvergenci mocninných řad. Metoda GF vždy vede ke správným výsledkům bez ohledu na obory konvergence použitých řad.

Poznámka ke konvergenci

Při výpočtech jsme se nestarali o konvergenci mocninných řad. Metoda GF vždy vede ke správným výsledkům bez ohledu na obory konvergence použitých řad.

S mocninnými řadami pracujeme jako s formálními řadami. Např. součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ lze *definovat* jako řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. Vztah

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$$

pak můžeme chápat jako jiný zápis rovnosti

$$(1-z)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n = 1,$$

která formálně platí pro každé $z \in \mathbb{C}$ bez ohledu na to, že nekonečná řada konverguje pouze pro $|z| < 1$.

Poznámka ke konvergenci

Při výpočtech jsme se nestarali o konvergenci mocninných řad. Metoda GF vždy vede ke správným výsledkům bez ohledu na obory konvergence použitých řad.

S mocninnými řadami pracujeme jako s formálními řadami. Např. součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ lze *definovat* jako řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, kde $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$. Vztah

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$$

pak můžeme chápat jako jiný zápis rovnosti

$$(1-z)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n = 1,$$

která formálně platí pro každé $z \in \mathbb{C}$ bez ohledu na to, že nekonečná řada konverguje pouze pro $|z| < 1$.

Řešení rekurentní rovnice lze vždy ověřit dosazením.