

Catalanova čísla

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Několic citátů

Mathematicians are often amazed that certain mathematical objects (numbers, sequences, etc.) show up so often. For example, in enumerative combinatorics we encounter the Fibonacci and Catalan sequences in many problems that seem to have nothing to do with each other.

(Doron Zeilberger, 2002)

Catalan numbers are probably the most frequently occurring combinatorial numbers after the binomial coefficients.

(Neil Sloane & Simon Plouffe, 1995)

Catalan numbers are the subject of [much] interest (sometimes known as Catalan disease).

(Christian Aebi, Grant Cairns, 2008)

Catalan numbers are even more fascinating [than the Fibonacci numbers]. Like the North Star in the evening sky, they are a beautiful and bright light in the mathematical heavens. They continue to provide a fertile ground for number theorists, Catalan enthusiasts and computer scientists.

(Thomas Koshy, 2009)



The OEIS is supported by [the many generous donors to the OEIS Foundation](#).

0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
23 IS 12
10 22 11 21

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES[®]

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

(Greetings from [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!](#))

A000108	Catalan numbers: $C(n) = \text{binomial}(2n,n)/(n+1) = (2n)!/(n!(n+1)!)$. (Formerly M1459 N0577)	4196
---------	--	------

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900,
2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420,
24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452,
18367353072152, 69533550916004, 263747951750360, 1002242216651368,
3814986502092304

[\(list; graph; refs; listen; history; text; internal format\)](#)

OFFSET 0,3

COMMENTS These were formerly sometimes called Segner numbers.
A very large number of combinatorial interpretations are known -
see references, esp. R. P. Stanley, "Catalan Numbers",
Cambridge University Press, 2015. This is probably the longest
entry in the OEIS, and rightly so.



- Seznámit se s příklady úloh vedoucích na Catalanova čísla
- Znáť explicitní a rekurentní vzorec pro Catalanova čísla, umět je využívat
- Rozumět geometrickému významu Catalanových čísel

Úloha o frontě před pokladnou (1)

U pokladny se prodávají vstupenky za 50 Kč.

Ve frontě stojí $n + m$ osob; n z nich má padesátikorunu, m má pouze stokorunu.

Pokladník má počáteční zásobu a padesátikorun.

Jestliže pořadí osob je náhodné, jaká je pravděpodobnost, že bude moci vrátit peníze každé osobě se stokorunou?

Úloha o frontě před pokladnou (1)

U pokladny se prodávají vstupenky za 50 Kč.

Ve frontě stojí $n + m$ osob; n z nich má padesátikorunu, m má pouze stokorunu.

Pokladník má počáteční zásobu a padesátikorun.

Jestliže pořadí osob je náhodné, jaká je pravděpodobnost, že bude moci vrátit peníze každé osobě se stokorunou?

Terminologie:

Fronta projde = pokladník bude moci vrátit peníze všem osobám se stokorunou.

Úloha o frontě před pokladnou (1)

U pokladny se prodávají vstupenky za 50 Kč.

Ve frontě stojí $n + m$ osob; n z nich má padesátikorunu, m má pouze stokorunu.

Pokladník má počáteční zásobu a padesátikorun.

Jestliže pořadí osob je náhodné, jaká je pravděpodobnost, že bude moci vrátit peníze každé osobě se stokorunou?

Terminologie:

Fronta projde = pokladník bude moci vrátit peníze všem osobám se stokorunou.

Pozorování:

Stačí uvažovat $a + n \geq m$, jinak fronta neprojde.

Není podstatné pořadí osob, fronta je uspořádaná $(n + m)$ -tice sestavená ze symbolů 50 a 100. Počet všech front je $\binom{n+m}{n}$.

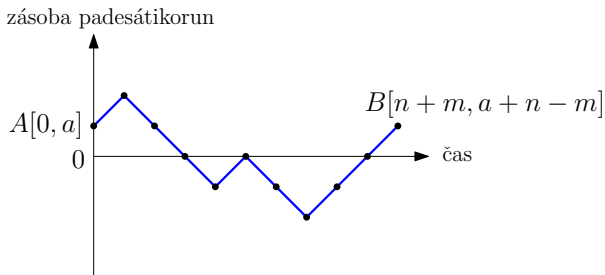
Potřebujeme vypočítat, kolik front projde, resp. neprojde.

Úloha o frontě před pokladnou (2)

Každou frontu lze znázornit graficky.

Příklad: 50, 100, 100, 100, 50, 100, 100, 50, 50, 50.

Ve frontě je $m = 5$ osob se stokorunou a $n = 5$ osob s padesátikorunou, pokladník má na začátku $a = 1$ padesátikorunu.

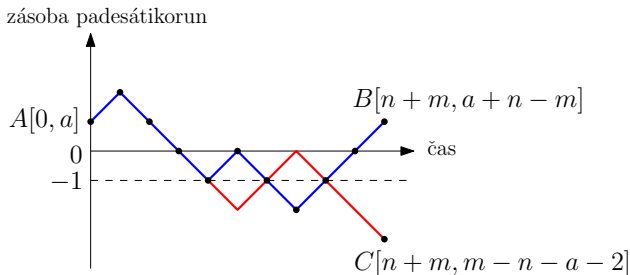


Fronta neprojde, pokud lomená čára klesne pod osu x.

Úloha o frontě před pokladnou (3)

Počet front, které neprojdou = počet lomených čar z A do B , které klesnou pod osu x .

Najdeme první okamžik, kdy čára klesne pod osu x . Začneme cestu zrcadlit podél přímky $y = -1$.



Nová cesta skončí v bodě C , který je zrcadlovým obrazem B a má y -ovou souřadnici $-1 - (a + n - m + 1) = m - n - a - 2$.

Počet lomených čar z A do B , které klesnou pod osu x = počet všech lomených čar z A do C .

Úloha o frontě před pokladnou (4)

Kolik je cest z A do C ? Určíme počty stoupání a klesání.

1. úsek = část cesty do okamžiku, kdy protne přímkou $y = -1$

Původní cesta z A do B :

	stoupání	klesání
1. úsek	l	$a + l + 1$
2. úsek	$n - l$	$m - a - l - 1$

Úloha o frontě před pokladnou (4)

Kolik je cest z A do C ? Určíme počty stoupání a klesání.

1. úsek = část cesty do okamžiku, kdy protne přímkou $y = -1$

Původní cesta z A do B :

	stoupání	klesání
1. úsek	l	$a + l + 1$
2. úsek	$n - l$	$m - a - l - 1$

Odpovídající cesta z A do C (zrcadlení 2. úseku):

	stoupání	klesání
1. úsek	l	$a + l + 1$
2. úsek	$m - a - l - 1$	$n - l$

Úloha o frontě před pokladnou (4)

Kolik je cest z A do C ? Určíme počty stoupání a klesání.

1. úsek = část cesty do okamžiku, kdy protne přímkou $y = -1$

Původní cesta z A do B :

	stoupání	klesání
1. úsek	l	$a + l + 1$
2. úsek	$n - l$	$m - a - l - 1$

Odpovídající cesta z A do C (zrcadlení 2. úseku):

	stoupání	klesání
1. úsek	l	$a + l + 1$
2. úsek	$m - a - l - 1$	$n - l$

Celkový počet stoupání na cestě z A do C je

$l + m - a - l - 1 = m - a - 1$, celkový počet klesání je

$a + l + 1 + n - l = a + n + 1$.

Počet všech cest z A do C je $\binom{n+m}{a+n+1}$.

Úloha o frontě před pokladnou (5)

Počet front, které neprojdou, je $\binom{n+m}{a+n+1}$.

Počet front, které projdou, je $\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{a+n+1}$.

Hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{a+n+1}}{\binom{n+m}{n}}.$$

Úloha o frontě před pokladnou (5)

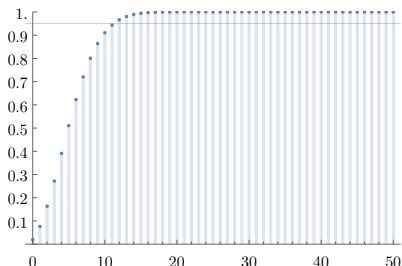
Počet front, které neprojdou, je $\binom{n+m}{a+n+1}$.

Počet front, které projdou, je $\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{a+n+1}$.

Hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{a+n+1}}{\binom{n+m}{n}}.$$

100 osob, $m = n = 50$, pravděpodobnost v závislosti na volbě a :



Pro $P \geq 0,95$ stačí vzít $a \geq 12$ padesátikorun.

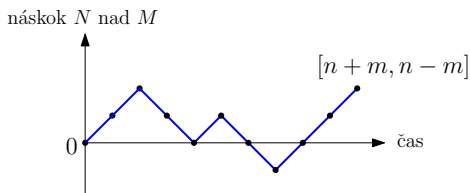
Hlasovací problém (1)

Ve volbách soupeří dva kandidáti M a N . Kandidát M získal m hlasů a kandidát N obdržel n hlasů, přičemž $n \geq m$. Jestliže pořadí sčítání hlasů bylo náhodné, jaká je pravděpodobnost, že v průběhu sčítání měl N vždy aspoň tolik hlasů jako M ?

Hlasovací problém (1)

Ve volbách soupeří dva kandidáti M a N . Kandidát M získal m hlasů a kandidát N obdržel n hlasů, přičemž $n \geq m$. Jestliže pořadí sčítání hlasů bylo náhodné, jaká je pravděpodobnost, že v průběhu sčítání měl N vždy aspoň tolik hlasů jako M ?

Grafické znázornění sčítání pro posloupnost hlasů $N, N, M, M, N, M, M, N, N, N$:



Lomená čára z $[0, 0]$ do $[n + m, n - m]$.
 N měl vždy aspoň tolik hlasů jako $M \Leftrightarrow$ lomená čára neklesne pod osu x .

Hlasovací problém (2)

Hlasovací problém je totožný s úlohou o frontě před pokladnou, kde pokladník nemá na začátku žádné padesátikoruny.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1}}{\binom{n+m}{n}} = 1 - \frac{\frac{(n+m)\cdots m}{(n+1)!}}{\frac{(n+m)\cdots(m+1)}{n!}} \\ &= 1 - \frac{m}{n+1} = \frac{n+1-m}{n+1} \end{aligned}$$

Hlasovací problém (2)

Hlasovací problém je totožný s úlohou o frontě před pokladnou, kde pokladník nemá na začátku žádné padesátikoruny.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1}}{\binom{n+m}{n}} = 1 - \frac{\frac{(n+m)\cdots m}{(n+1)!}}{\frac{(n+m)\cdots(m+1)}{n!}} \\ &= 1 - \frac{m}{n+1} = \frac{n+1-m}{n+1} \end{aligned}$$

Speciální případy:

- Pokud hlasování skončilo remízou, tj. $m = n$, pak $P = \frac{1}{n+1}$. Pro velká n je tato pravděpodobnost velmi malá.
- Pokud kandidát N zvítězil s velkou převahou, tj. $n \gg m$, pak pravděpodobnost $P = 1 - \frac{m}{n+1}$ je blízká k jedné.

Catalanova čísla

$a = 0, m = n:$

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{2n \cdots (n+1)}{n!} - \frac{2n \cdots n}{(n+1)!} = \\ &= \frac{2n \cdots (n+1)}{n!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Toto číslo udává

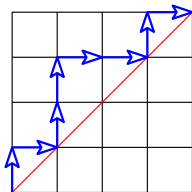
- počet front s n padesátikorunami a n stokorunami, které projdou, pokud pokladník nemá na začátku žádnou padesátikorunu,
- počet pořadí sčítání hlasů ve volbách, kde oba kandidáti získali shodně n hlasů, přičemž kandidát N měl v průběhu sčítání vždy aspoň tolik hlasů jako kandidát M .

Čísla $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, se nazývají Catalanova čísla.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

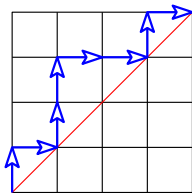
Cesty v mříži (1)

Mějme čtverec $n \times n$ rozdělený úsečkami na n^2 jednotkových čtverečků. Uvažujme cesty vedoucí po hranách této mříže z levého dolního do pravého horního rohu, přičemž každý krok vede buď vpravo, nebo nahoru. Kolik je cest, které nikdy nesestoupí pod diagonálu vedoucí z levého dolního do pravého horního rohu?



Cesty v mříži (1)

Mějme čtverec $n \times n$ rozdělený úsečkami na n^2 jednotkových čtverečků. Uvažujme cesty vedoucí po hranách této mříže z levého dolního do pravého horního rohu, přičemž každý krok vede buď vpravo, nebo nahoru. Kolik je cest, které nikdy nesestoupí pod diagonálu vedoucí z levého dolního do pravého horního rohu?

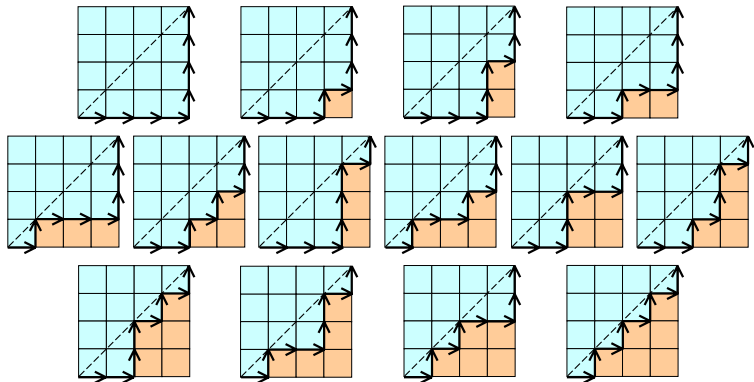


Otočení o 45 stupňů ve směru pohybu hodinových ručiček
→ obrázek stejného typu jako v hlasovacím problému, kde oba kandidáti získali n hlasů.

Obě úlohy jsou ekvivalentní a počet přípustných cest je C_n .

Cesty v mříži (2)

Ze symetrie je zřejmé, že C_n udává rovněž počet cest ve čtverci $n \times n$, které nikdy nevystoupí nad diagonálu.



Rekurentní rovnice pro Catalanova čísla

Věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

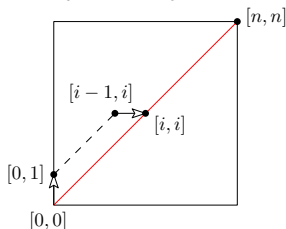
$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}.$$

Rekurentní rovnice pro Catalanova čísla

Věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}.$$

Důkaz. C_n = počet cest ve čtverci $n \times n$, které nikdy nesestoupí pod diagonálu. Po opuštění $[0, 0]$ se cesta poprvé dotkne diagonály v $[i, i]$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$.



Z $[0, 1]$ do $[i-1, i]$ je C_{i-1} možností, z $[i, i]$ do $[n, n]$ je C_{n-i} možností. Celkem $C_{i-1} C_{n-i}$ pro pevné i , $\sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$ pro libovolné i .

Použití rekurentního vzorce

Vztahem

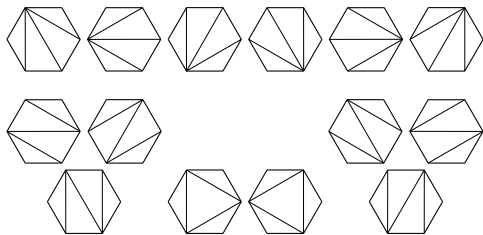
$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + C_2 C_{n-3} + \cdots + C_{n-1} C_0, \quad n \geq 1$$

a hodnotou $C_0 = 1$ je posloupnost $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ jednoznačně určena.

V úlohách vedoucích na Catalanova čísla může být obtížné přímo ověřit, že uvažovaná posloupnost čísel je popsána vzorcem $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$; často je jednodušší ukázat, že posloupnost splňuje stejný rekurentní vztah jako C_n .

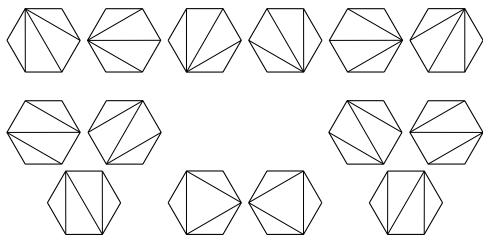
Triangulace mnohoúhelníku (1)

Kolika způsoby lze rozdělit konvexní mnohoúhelník pomocí neprotínajících se úhlopříček na trojúhelníky?



Triangulace mnohoúhelníku (1)

Kolika způsoby lze rozdělit konvexní mnohoúhelník pomocí neprotínajících se úhlopříček na trojúhelníky?



T_n = počet triangulací pro $(n + 2)$ -úhelník, $T_0 = 1$.

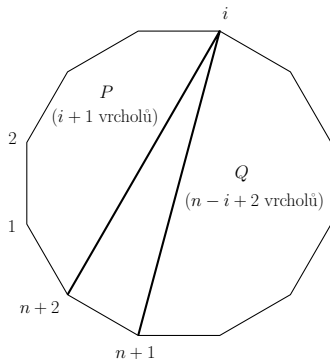
Leonhard Euler správně určil hodnoty

$$T_1=1, T_2=2, T_3=5, T_4=14, T_5=42, T_6=132, T_7=429, T_8=1430$$

a uhodl obecný vzorec $T_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Triangulace mnohoúhelníku (2)

V každé triangulaci je strana $(n+1, n+2)$ součástí nějakého trojúhelníku $(i, n+1, n+2)$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$.



Oblast P má T_{i-1} triangulací, oblast Q má T_{n-i} triangulací.

$T_{i-1} T_{n-i}$ triangulací pro pevné i , $\sum_{i=1}^n T_{i-1} T_{n-i}$ pro libovolné i

$\Rightarrow T_n = \sum_{i=1}^n T_{i-1} T_{n-i}, \quad T_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad T_n = C_n$ pro každé n



Eugène Charles Catalan a jeho úloha



E. Catalan (1838): Kolika způsoby lze vynásobit n různých činitelů? Operace není asociativní, pořadí násobení musí být určeno jednoznačně.

Uzávorkování 4 činitelů: $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$, $((a_1 a_2) a_3) a_4$,
 $a_1(a_2(a_3 a_4))$, $a_1((a_2 a_3) a_4)$, $(a_1(a_2 a_3)) a_4$.

Počet uzávorkování pro n činitelů je C_{n-1} .

