Fibonacciho čísla

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Výukové cíle

- Znát definici Fibonacciho čísel
- Umět rozpoznat úlohy vedoucí na Fibonacciho čísla
- Ovládat metody výpočtu Fibonacciho čísel

Úloha o králících (1)

Leonardo Pisánský = Fibonacci (Liber Abaci, 1202):

Máme pár čerstvě narozených králíků. Kolik párů budeme mít po dvanácti měsících, jestliže

- každý pár dospívá za jeden měsíc,
- každému dospělému páru se každý měsíc narodí další pár,
- králíci nehynou?

Úloha o králících (1)

Leonardo Pisánský = Fibonacci (Liber Abaci, 1202):

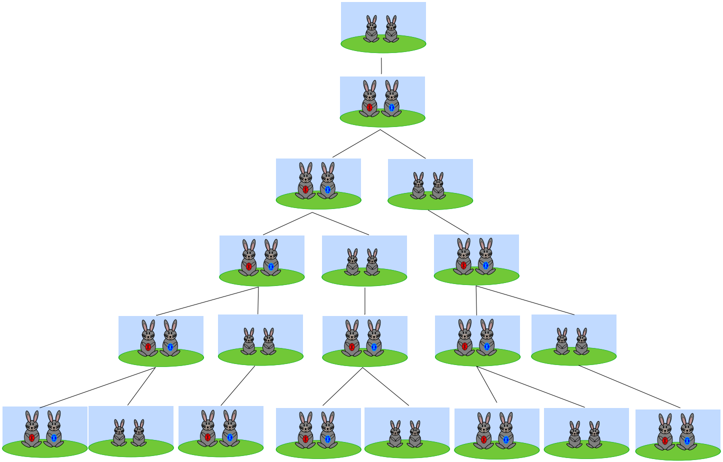
Máme pár čerstvě narozených králíků. Kolik párů budeme mít po dvanácti měsících, jestliže

- každý pár dospívá za jeden měsíc,
- každému dospělému páru se každý měsíc narodí další pár,
- králíci nehynou?

V úloze nejsou podstatní jednotliví králíci, ale páry.

F_n = počet párů po n měsících

Úloha o králících (2)



n	0	1	2	3	4	5
párů po n měsících (F_n)	1	1	2	3	5	8
dospělých párů po n měsících	0	1	1	2	3	5

Úloha o králících (3)

počet dospělých párů po n měsících $=$ počet párů po $n-1$ měsících

Úloha o králících (3)

počet dospělých párů po n měsících $=$ počet párů po $n-1$ měsících

$$\begin{aligned}
\text{počet párů po } n \text{ měsících} &= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet nově narozených párů} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet dospělých párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet párů po } n-2 \text{ měsících}
\end{aligned}$$

Úloha o králících (3)

počet dospělých párů po n měsících $=$ počet párů po $n-1$ měsících

$$
\begin{aligned}
\text{počet párů po } n \text{ měsících} &= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet nově narozených párů} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet dospělých párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet párů po } n-2 \text{ měsících}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Úloha o králících (3)

počet dospělých párů po n měsících $=$ počet párů po $n-1$ měsících

$$
\begin{aligned}
\text{počet párů po } n \text{ měsících} &= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet nově narozených párů} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet dospělých párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&= \text{počet párů po } n-1 \text{ měsících} \\
&\quad + \text{počet párů po } n-2 \text{ měsících}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Fibonacciho čísla

Posloupnost čísel $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná počátečními členy $F_0 = F_1 = 1$ a rekurentním vztahem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

se nazývá Fibonacciho posloupnost.

Fibonacciho čísla

Posloupnost čísel $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná počátečními členy $F_0 = F_1 = 1$ a rekurentním vztahem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

se nazývá Fibonacciho posloupnost.

V některých zdrojích $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ (posun o jednu pozici).

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Terminologie: dlaždice 1×2 = domino,
dlaždice 1×1 = monomino.

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Terminologie: dlaždice 1×2 = domino,
dlaždice 1×1 = monomino.

p_n = počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Terminologie: dlaždice 1×2 = domino, dlaždice 1×1 = monomino.

p_n = počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$

$p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Terminologie: dlaždice 1×2 = domino,
dlaždice 1×1 = monomino.

p_n = počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$

$p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$

$p_0 = 1$

Úloha o dlaždicích, 1. verze (1)

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×1 a 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$?

Terminologie: dlaždice 1×2 = domino,
dlaždice 1×1 = monomino.

p_n = počet způsobů, jak pomocí monomin a domin vyplnit obdélník $1 \times n$

$p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$

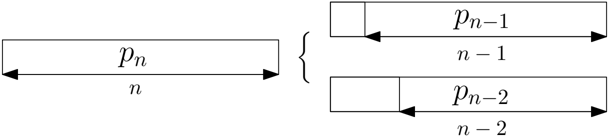
$p_0 = 1$

Ukážeme, že $p_n = F_n$.

Stačí ověřit, že posloupnost $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje stejný rekurentní vztah jako $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Úloha o dlaždicích, 1. verze (2)

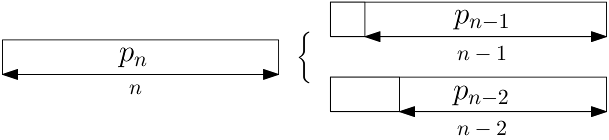
Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $1 \times n$ pomocí monomin a domin:



$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Úloha o dlaždicích, 1. verze (2)

Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $1 \times n$ pomocí monomin a domin:



$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow p_n = F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Úloha o dlaždicích, 2. verze

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

Úloha o dlaždicích, 2. verze

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

q_n = počet způsobů

$q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$

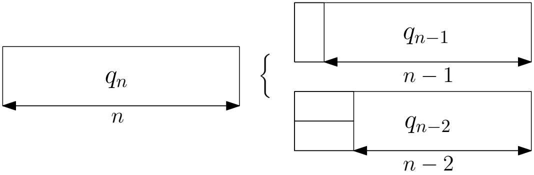
Úloha o dlaždicích, 2. verze

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

q_n = počet způsobů

$q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$

Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $2 \times n$ pomocí domin:



$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2$$

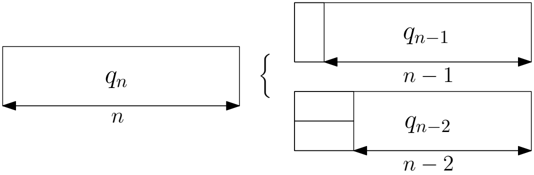
Úloha o dlaždicích, 2. verze

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

q_n = počet způsobů

$q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$

Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $2 \times n$ pomocí domin:



$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow q_n = F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

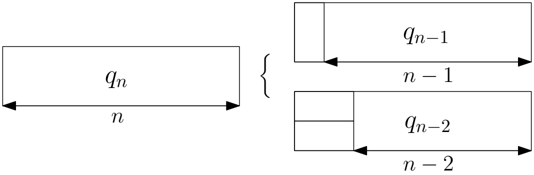
Úloha o dlaždicích, 2. verze

Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1×2 vyplnit obdélník o rozměrech $2 \times n$?

q_n = počet způsobů

$q_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$

Dva způsoby, jak začít vyplňovat obdélník $2 \times n$ pomocí domin:



$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

$$\Rightarrow q_n = F_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Jaký je vztah mezi oběma úlohami?

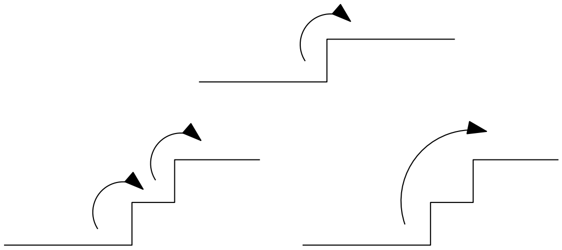
Úloha o schodišti (1)

Kolika způsoby lze vystoupat po schodišti o n schodech, jestliže v každém kroku můžeme vynechat nejvýše 1 schod? Na každý schod, na který vstoupíme, šlápneme levou i pravou nohou a nezáleží na tom, v jakém pořadí to učiníme.

Úloha o schodišti (1)

Kolika způsoby lze vystoupat po schodišti o n schodech, jestliže v každém kroku můžeme vynechat nejvýše 1 schod? Na každý schod, na který vstoupíme, šlápneme levou i pravou nohou a nezáleží na tom, v jakém pořadí to učiníme.

r_n = počet způsobů



$r_0 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

Úloha o schodišti (2)

Existují dvě možnosti, jak začít:

- Šlápneme na 1. schod; zbývá $n-1$ schodů, které lze zdolat r_{n-1} způsoby.
- Vynecháme 1. schod, šlápneme na 2. schod; zbývá $n-2$ schodů, které lze zdolat r_{n-2} způsoby.

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Úloha o schodišti (2)

Existují dvě možnosti, jak začít:

- Šlápneme na 1. schod; zbývá $n-1$ schodů, které lze zdolat r_{n-1} způsoby.
- Vynecháme 1. schod, šlápneme na 2. schod; zbývá $n-2$ schodů, které lze zdolat r_{n-2} způsoby.

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow r_n = F_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

posloupnost hodů = uspořádaná n-tice sestavená z písmen R (rub) a L (líc)

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

posloupnost hodů = uspořádaná n-tice sestavená z písmen R (rub) a L (líc)

Počet všech možností je 2^n.

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

posloupnost hodů = uspořádaná n-tice sestavená z písmen R (rub) a L (líc)

Počet všech možností je 2^n.

a_n = počet příznivých možností (dvě R nejsou vedle sebe)

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

posloupnost hodů = uspořádaná n-tice sestavená z písmen R (rub) a L (líc)

Počet všech možností je 2^n.

a_n = počet příznivých možností (dvě R nejsou vedle sebe)

$a_1 = 2$ (R, L),
$a_2 = 3$ (RL, LR, LL),
$a_3 = 5$ (RLR, RLL, LRL, LLL, LLR)

Házení mincí (1)

Hodíme-li n-krát mincí, jaká je pravděpodobnost, že nikdy nepadne dvakrát po sobě rub?

posloupnost hodů = uspořádaná n-tice sestavená z písmen R (rub) a L (líc)

Počet všech možností je 2^n.

a_n = počet příznivých možností (dvě R nejsou vedle sebe)

$a_1 = 2$ (R, L),
$a_2 = 3$ (RL, LR, LL),
$a_3 = 5$ (RLR, RLL, LRL, LLL, LLR)

Hypotéza: $a_n = F_{n+1}$

Házení mincí (2)

Jak může začínat přípustná n-tice písmen R a L?

- Začíná písmenem L, následuje libovolná přípustná $(n-1)$-tice.
- Začíná písmenem R, následuje L, poté libovolná přípustná $(n-2)$-tice.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Házení mincí (2)

Jak může začínat přípustná n-tice písmen R a L?

- Začíná písmenem L, následuje libovolná přípustná $(n-1)$-tice.
- Začíná písmenem R, následuje L, poté libovolná přípustná $(n-2)$-tice.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$a_1 = 2 = F_2$, $a_2 = 3 = F_3$, každý další člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je součtem předchozích dvou $\Rightarrow a_n = F_{n+1}$.

Házení mincí (2)

Jak může začínat přípustná n-tice písmen R a L?

- Začíná písmenem L, následuje libovolná přípustná $(n-1)$-tice.
- Začíná písmenem R, následuje L, poté libovolná přípustná $(n-2)$-tice.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$a_1 = 2 = F_2$, $a_2 = 3 = F_3$, každý další člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je součtem předchozích dvou $\Rightarrow a_n = F_{n+1}$.

Hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{a_n}{2^n} = \frac{F_{n+1}}{2^n}.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (1)

Věta. Pro každou dvojici čísel $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (1)

Věta. Pro každou dvojici čísel $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Důkaz. F_{n+m} = počet způsobů, jak vyplnit obdélník $1 \times (n+m)$ pomocí monomin a domin.

Výpočet Fibonacciho čísel (1)

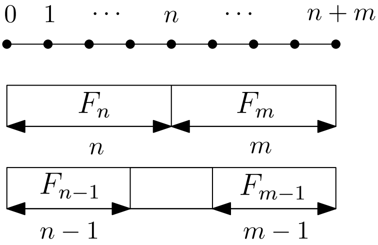
Věta. Pro každou dvojici čísel $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Důkaz. F_{n+m} = počet způsobů, jak vyplnit obdélník $1 \times (n+m)$ pomocí monomin a domin.

Jaká je situace ve vzdálenosti n od levého okraje obdélníku?

- Dotýkají se zde dvě dlaždice. Těchto možností je $F_n F_m$.
- Je zde střed domina. Těchto možností je $F_{n-1} F_{m-1}$.



Dokázali jsme:

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Důsledky:

- Pro $m = n$ platí
$$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (2)

Dokázali jsme:

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Důsledky:

- Pro $m = n$ platí
$$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2.$$
- Pro $m = n + 1$ platí
$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n = F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) = \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Výpočet Fibonacciho čísel (2)

Dokázali jsme:

$$F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}.$$

Důsledky:

- Pro $m = n$ platí
$$F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2.$$

- Pro $m = n + 1$ platí

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Například

$$F_{100} = F_{50}^2 + F_{49}^2,$$

$$F_{50} = F_{25}^2 + F_{24}^2, \quad F_{49} = F_{25}^2 - F_{23}^2.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (3)

Věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Výpočet Fibonacciho čísel (3)

Věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Důkaz indukcí:

Pro $n = 0$ je na pravé straně

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 = F_0.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (3)

Věta. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Důkaz indukcí:

Pro $n = 0$ je na pravé straně

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = F_0.$$

Pro $n = 1$ je na pravé straně

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = 1 = F_1.$$

Výpočet Fibonacciho čísel (4)

Dokončení důkazu, indukční krok: $n-1$, $n-2 \Rightarrow n$

$$
\begin{aligned}
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]
\end{aligned}
$$

Výpočet Fibonacciho čísel (5)

Dokázali jsme:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- Binetův vzorec (1843), ale byl znám už v 18. století (Abraham de Moivre, Daniel Bernoulli)
- Nepříliš vhodný pro praktické výpočty (odmocniny)
- Sčítanec $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ rychle konverguje k nule, proto

$$F_n \doteq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Fibonacciho posloupnost roste přibližně stejně rychle jako geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$