

Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

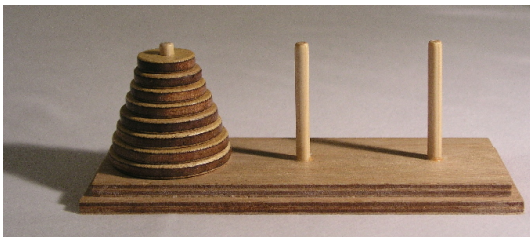
Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

- Umět převést zadaný problém na úlohu stejného typu, ale menšího rozsahu
- Vědět, jak tento převod vyjádřit ve tvaru rekurentní rovnice
- Ovládat elementární metody řešení rekurentních rovnic
- Dokázat postupy ilustrovat na příkladech

Hanojské věže (1)



- K dispozici 3 kolíky a 8 kotoučů různých velikostí.
- Na začátku hry všechny kotouče na levém kolíku, úkolem je přenést kotouče na pravý kolík.
- V každém kroku přemístíme jeden kotouč z jednoho kolíku na jiný, větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším.

Jaký je nejmenší počet kroků potřebných k dosažení cíle?
Má úloha řešení?

(Édouard Lucas, 1883)

Hanojské věže (2)



Hanojské věže (3)

Vyřešíme obecnější úlohu: 3 kolíky, n kotoučů

a_n = minimální počet kroků potřebných k vyřešení úlohy s n kotouči

Hanojské věže (3)

Vyřešíme obecnější úlohu: 3 kolíky, n kotoučů

a_n = minimální počet kroků potřebných k vyřešení úlohy s n kotouči

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

Hanojské věže (3)

Vyřešíme obecnější úlohu: 3 kolíky, n kotoučů

a_n = minimální počet kroků potřebných k vyřešení úlohy s n kotouči

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

Počet kroků nezáleží na tom, který kolík je startovní a který cílový

Hanojské věže (4)

Pokud umíme vyřešit úlohu s $n - 1$ kotouči, umíme též vyřešit úlohu s n kotouči.

Hanojské věže (4)

Pokud umíme vyřešit úlohu s $n - 1$ kotouči, umíme též vyřešit úlohu s n kotouči.

- Přemístíme vrchních $n - 1$ kotoučů na prostřední kolík (a_{n-1} kroků).
- Přeneseme největší kotouč z levého kolíku na pravý (1 krok).
- Přemístíme $n - 1$ kotoučů z prostředního kolíku na pravý (a_{n-1} kroků).

Hanojské věže (4)

Pokud umíme vyřešit úlohu s $n - 1$ kotouči, umíme též vyřešit úlohu s n kotouči.

- Přemístíme vrchních $n - 1$ kotoučů na prostřední kolík (a_{n-1} kroků).
- Přeneseme největší kotouč z levého kolíku na pravý (1 krok).
- Přemístíme $n - 1$ kotoučů z prostředního kolíku na pravý (a_{n-1} kroků).

Žádný jednodušší způsob řešení neexistuje.

Hanojské věže (4)

Pokud umíme vyřešit úlohu s $n - 1$ kotouči, umíme též vyřešit úlohu s n kotouči.

- Přemístíme vrchních $n - 1$ kotoučů na prostřední kolík (a_{n-1} kroků).
- Přeneseme největší kotouč z levého kolíku na pravý (1 krok).
- Přemístíme $n - 1$ kotoučů z prostředního kolíku na pravý (a_{n-1} kroků).

Žádný jednodušší způsob řešení neexistuje.

Pro každé $n \geq 2$ tedy platí

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1},$$

neboli $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Hanojské věže (5)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a_n | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 |

K vyřešení úlohy s 8 kotouči je zapotřebí 255 kroků.

Hanojské věže (5)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a_n | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 |

K vyřešení úlohy s 8 kotouči je zapotřebí 255 kroků.

Hypotéza:

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hanojské věže (5)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a_n | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 |

K vyřešení úlohy s 8 kotouči je zapotřebí 255 kroků.

Hypotéza:

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz indukcí:

Pro $n = 1$ vychází $2^1 - 1 = 1 = a_1$.

Hanojské věže (5)

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a_n | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 |

K vyřešení úlohy s 8 kotouči je zapotřebí 255 kroků.

Hypotéza:

$$a_n = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz indukcí:

Pro $n = 1$ vychází $2^1 - 1 = 1 = a_1$.

Indukční krok: Pokud $a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, pak z rekurentní rovnice plyne

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1.$$

Jiné odvození:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2 = 2(a_{n-1} + 1)$$

Jiné odvození:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n + 1 = 2a_{n-1} + 2 = 2(a_{n-1} + 1)$$

Substituce $b_n = a_n + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$:

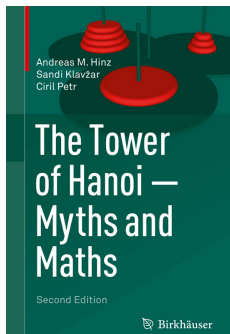
$$b_n = 2b_{n-1}$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem 2.

$$b_1 = a_1 + 1 = 2 \Rightarrow b_n = 2^n \Rightarrow a_n = b_n - 1 = 2^n - 1.$$

Hanojské věže (7)

- Varianta se čtyřmi kolíky a n disky je těžká.
- Nejmenší počet kroků potřebných k vyřešení této úlohy lze vypočítat pomocí tzv. Frame-Stewartova algoritmu.
- Algoritmus je znám od roku 1941, jeho správnost dokázal francouzský matematik Thierry Bousch v roce 2014.

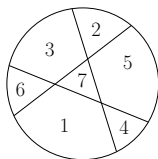
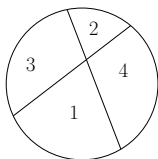
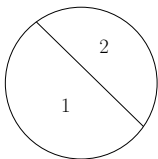


Přímky v rovině (1)

Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet koláč ve tvaru kruhu pomocí n rovných řezů?

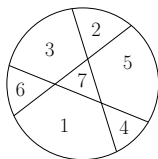
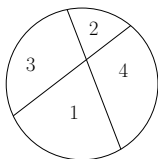
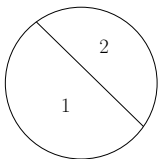
Přímky v rovině (1)

Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet koláč ve tvaru kruhu pomocí n rovných řezů?



Přímky v rovině (1)

Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet koláč ve tvaru kruhu pomocí n rovných řezů?

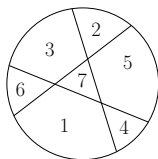
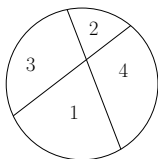
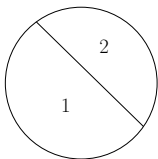


Ekvivalentní úloha: Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?

(Jakob Steiner, 1826)

Přímky v rovině (1)

Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet koláč ve tvaru kruhu pomocí n rovných řezů?



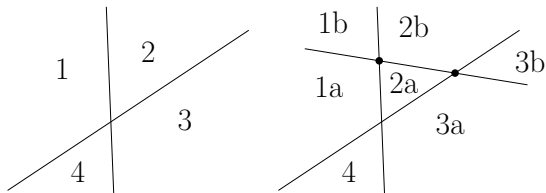
Ekvivalentní úloha: Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?

(Jakob Steiner, 1826)

L_n = maximální počet oblastí v rovině při sestrojení n přímek

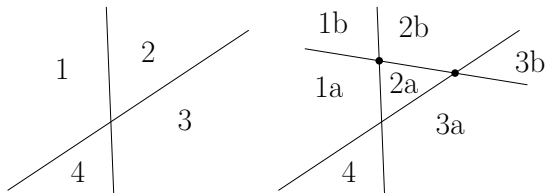
$$L_1 = 2, L_2 = 4, L_3 = 7, \dots$$

Přímky v rovině (2)



- Předpokládejme, že v rovině je již $n - 1$ přímek.
- n -tá přímka může protnout všechny z nich.
- Příslušné průsečíky dělí n -tou přímkou na nejvýše n úseků.
- Každý takový úsek dělí některou stávající oblast roviny na dvě podoblasti.

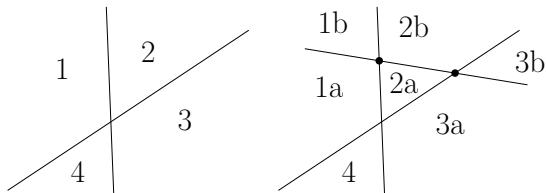
Přímky v rovině (2)



- Předpokládejme, že v rovině je již $n - 1$ přímek.
- n -tá přímka může protnout všechny z nich.
- Příslušné průsečíky dělí n -tou přímkou na nejvýše n úseků.
- Každý takový úsek dělí některou stávající oblast roviny na dvě podoblasti.

Při sestavení n -té přímky se počet oblastí zvětší maximálně o n .

Přímky v rovině (2)



- Předpokládejme, že v rovině je již $n - 1$ přímek.
- n -tá přímka může protnout všechny z nich.
- Příslušné průsečíky dělí n -tou přímku na nejvýše n úseků.
- Každý takový úsek dělí některou stávající oblast roviny na dvě podoblasti.

Při sestrojení n -té přímky se počet oblastí zvětší maximálně o n .

Je jich právě n , pokud přímky volíme tak, aby každé dvě byly různoběžné a žádné tři neměly společný bod.

Přímky v rovině (3)

Z předchozí úvahy plyne, že pro $n \geq 2$ platí vztah

$$L_n = L_{n-1} + n.$$

Opakovaným použitím tohoto vztahu dostaneme

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n = \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n = \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \\ &\dots \\ &= L_1 + 2 + 3 + \dots + n = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Úloha o zajatcích (1)

n zajatcům čekajícím na popravu bylo nařízeno, aby se rozestavili do kruhu. Postupně bude popravován každý druhý zajatec tak dlouho, dokud nezůstane naživu poslední; tomu bude udělena milost. Zjistěte, který zajatec zůstane naživu.

Úloha o zajatcích (1)

n zajatcům čekajícím na popravu bylo nařízeno, aby se rozestavili do kruhu. Postupně bude popraven každý druhý zajatec tak dlouho, dokud nezůstane naživu poslední; tomu bude udělena milost. Zjistěte, který zajatec zůstane naživu.

Čísla $1, \dots, n$

$j(n)$ = číslo přeživšího zajatce

Příklad: $j(10) = 5$

Úloha o zajatcích (1)

n zajatcům čekajícím na popravu bylo nařízeno, aby se rozestavili do kruhu. Postupně bude popraven každý druhý zajatec tak dlouho, dokud nezůstane naživu poslední; tomu bude udělena milost. Zjistěte, který zajatec zůstane naživu.

Čísla $1, \dots, n$

$j(n)$ = číslo přeživšího zajatce

Příklad: $j(10) = 5$

$j(1) = j(2) = 1$.

Pro $j(n)$, kde $n \geq 3$, odvodíme rekurentní rovnici.

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 \dots $2k - 1$ $2k$

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) - 1$

$$j(2k) = 2j(k) - 1$$

- n sudé, $n = 2k + 1$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$ $2k + 1$

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) - 1$

$$j(2k) = 2j(k) - 1$$

- n sudé, $n = 2k + 1$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$ $2k + 1$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) - 1$

$$j(2k) = 2j(k) - 1$$

- n sudé, $n = 2k + 1$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$ $2k + 1$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Další krok: 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Zbývá k zajatců

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) - 1$

$$j(2k) = 2j(k) - 1$$

- n sudé, $n = 2k + 1$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$ $2k + 1$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Další krok: 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich

Úloha o zajatcích (2)

- n sudé, $n = 2k$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) - 1$

$$j(2k) = 2j(k) - 1$$

- n sudé, $n = 2k + 1$

Počáteční stav: 1 2 3 4 ... $2k - 1$ $2k$ $2k + 1$

Po 1. kole: 1 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

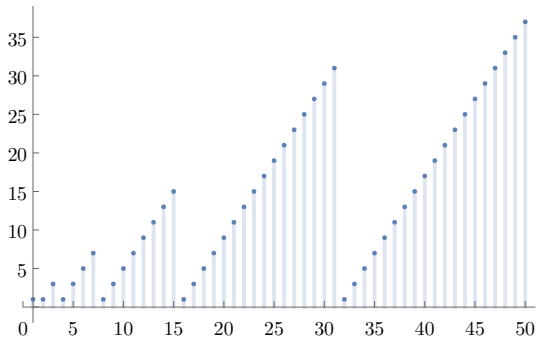
Další krok: 3 5 ... $2k - 1$ $2k + 1$

Zbývá k zajatců, přežije $j(k)$ -tý z nich, má číslo $2j(k) + 1$

$$j(2k + 1) = 2j(k) + 1$$

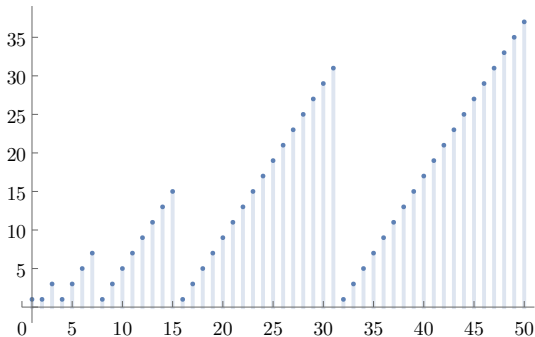
Úloha o zajatcích (3)

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $j(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | 3 | 5 |



Úloha o zajatcích (3)

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| $j(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 5 | 7 | 1 | 3 | 5 |



Hypotézy:

- Pokud n je mocnina 2, pak $j(n) = 1$.
- S každým zvýšením n o 1 narůstá $j(n)$ o 2, dokud nenarazíme na další mocninu 2.

Úloha o zajatcích (4)

Hypotéza: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Úloha o zajatcích (4)

Hypotéza: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Důkaz matematickou indukcí:

- $n = 1 = 2^0 + 0 \Rightarrow m = 0, l = 0$ a $2l + 1 = 1$, tvrzení platí.

Úloha o zajatcích (4)

Hypotéza: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Důkaz matematickou indukcí:

- $n = 1 = 2^0 + 0 \Rightarrow m = 0, l = 0$ a $2l + 1 = 1$, tvrzení platí.

Indukční krok, hypotéza platí pro $1, \dots, n - 1$:

- $n = 2^m + l$ je sudé, tj. $n = 2k$:

Úloha o zajatcích (4)

Hypotéza: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Důkaz matematickou indukcí:

- $n = 1 = 2^0 + 0 \Rightarrow m = 0, l = 0$ a $2l + 1 = 1$, tvrzení platí.

Indukční krok, hypotéza platí pro $1, \dots, n - 1$:

- $n = 2^m + l$ je sudé, tj. $n = 2k$:

$$\begin{aligned}j(n) &= j(2k) = 2j(k) - 1 = 2j\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = 2j\left(2^{m-1} + \frac{l}{2}\right) - 1 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{l}{2} + 1\right) - 1 = 2l + 1.\end{aligned}$$

- $n = 2^m + l$ je liché, tj. $n = 2k + 1$:

Úloha o zajatcích (4)

Hypotéza: Je-li $n = 2^m + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, pak $j(n) = 2l + 1$.

Důkaz matematickou indukcí:

- $n = 1 = 2^0 + 0 \Rightarrow m = 0, l = 0$ a $2l + 1 = 1$, tvrzení platí.

Indukční krok, hypotéza platí pro $1, \dots, n - 1$:

- $n = 2^m + l$ je sudé, tj. $n = 2k$:

$$\begin{aligned}j(n) &= j(2k) = 2j(k) - 1 = 2j\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = 2j\left(2^{m-1} + \frac{l}{2}\right) - 1 = \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{l}{2} + 1\right) - 1 = 2l + 1.\end{aligned}$$

- $n = 2^m + l$ je liché, tj. $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}j(n) &= j(2k + 1) = 2j(k) + 1 = 2j\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 = \\ &= 2j\left(2^{m-1} + \frac{l-1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{l-1}{2} + 1\right) + 1 = 2l + 1.\end{aligned}$$

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

$$100 = 64 + 36 = 2^6 + 36 \Rightarrow m = 6, l = 36 \Rightarrow j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

$$100 = 64 + 36 = 2^6 + 36 \Rightarrow m = 6, l = 36 \Rightarrow j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

- Úloha o zajatcích = Josephus problem

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

$$100 = 64 + 36 = 2^6 + 36 \Rightarrow m = 6, l = 36 \Rightarrow j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

- Úloha o zajatcích = Josephus problem
- Roku 67 n. l. se Josef Flavius se svými 40 židovskými spolubojovníky ocitl v obklíčení Římany. Když poznali, že nemají šanci vyváznout, rozhodli se raději pozabíjet. Flavius spolu s jedním dalším mužem ale měli štěstí, zůstali naživu jako poslední a zachránili si život tím, že se vzdali Římanům.

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

$$100 = 64 + 36 = 2^6 + 36 \Rightarrow m = 6, l = 36 \Rightarrow j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

- Úloha o zajatcích = Josephus problem
- Roku 67 n. l. se Josef Flavius se svými 40 židovskými spolubojovníky ocitl v obklíčení Římany. Když poznali, že nemají šanci vyváznout, rozhodli se raději pozabíjet. Flavius spolu s jedním dalším mužem ale měli štěstí, zůstali naživu jako poslední a zachránili si život tím, že se vzdali Římanům.
- Je nepravděpodobné, že by se Židé navzájem zabíjeli podle pravidel úlohy o zajatcích.

Úloha o zajatcích (5)

Příklad: $j(100) = ?$

$$100 = 64 + 36 = 2^6 + 36 \Rightarrow m = 6, l = 36 \Rightarrow j(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

- Úloha o zajatcích = Josephus problem
- Roku 67 n. l. se Josef Flavius se svými 40 židovskými spolubojovníky ocitl v obklíčení Římany. Když poznali, že nemají šanci vyváznout, rozhodli se raději pozabíjet. Flavius spolu s jedním dalším mužem ale měli štěstí, zůstali naživu jako poslední a zachránili si život tím, že se vzdali Římanům.
- Je nepravděpodobné, že by se Židé navzájem zabíjeli podle pravidel úlohy o zajatcích.
- Autoři středověkých a novověkých sbírek úloh spojili matematický problém s Flaviovým příběhem, aby jej učinili atraktivnějším.