Rozmisťovací úlohy

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Záleží na pořadí předmětů v každé přihrádce?

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Záleží na pořadí předmětů v každé přihrádce?
- Mohou být některé přihrádky prázdné?

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Záleží na pořadí předmětů v každé přihrádce?
- Mohou být některé přihrádky prázdné?

Předměty nerozlišitelné $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Klasifikace rozmisťovacích úloh

Kolika způsoby lze rozmístit n předmětů do r přihrádek?

- Jsou přihrádky rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Jsou předměty rozlišitelné, nebo nerozlišitelné?
- Záleží na pořadí předmětů v každé přihrádce?
- Mohou být některé přihrádky prázdné?

Předměty nerozlišitelné $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách

Celkem 12 variant.

Výukové cíle

- Rozlišovat 12 druhů rozmisťovacích úloh
- Ovládat metody jejich řešení
- Umět jednotlivé typy ilustrovat na konkrétních příkladech

1.1 Přihrádky rozlišitelné, předměty rozlišitelné

1.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků r osobám?

1.1 Přihrádky rozlišitelné, předměty rozlišitelné

1.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků r osobám?

a) Přihrádky mohou být prázdné:
   Počet možností je r^n.

1.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků r osobám?

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Počet možností je r^n.

b) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna rozmístění } n \text{ předmětů do } r \text{ přihrádek}, \\ A_i &= \text{všechna rozmístění } n \text{ předmětů do } r \text{ přihrádek}, \\ &\quad \text{kde } i\text{-tá přihrádka je prázdná} \end{aligned}$$

1.1 Přihrádky rozlišitelné, předměty rozlišitelné

1.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků r osobám?

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Počet možností je r^n.

b) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna rozmístění } n \text{ předmětů do } r \text{ přihrádek,} \\ A_i &= \text{všechna rozmístění } n \text{ předmětů do } r \text{ přihrádek,} \\ &\quad\ \text{kde } i\text{-tá přihrádka je prázdná} \end{aligned}$$

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_r}| = |A| - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| =$$

$$= r^n - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} (r-k)^n =$$

$$= r^n + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n.$$

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

Příklad: $n = 10$, $r = 3$, rozestavení $2\ \ 1\ \ 7\ \ 4 \mid 10\ \ 3\ \ 5 \mid 8\ \ 9\ \ 6$

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

Příklad: $n = 10$, $r = 3$, rozestavení $2\ \ 1\ \ 7\ \ 4 \mid 10\ \ 3\ \ 5 \mid 8\ \ 9\ \ 6$

Obecně: čísla $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů.

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

Příklad: $n = 10$, $r = 3$, rozestavení $2\ \ 1\ \ 7\ \ 4 \mid 10\ \ 3\ \ 5 \mid 8\ \ 9\ \ 6$

Obecně: čísla $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!}.$$

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

Příklad: $n = 10$, $r = 3$, rozestavení 2 1 7 4 | 10 3 5 | 8 9 6

Obecně: čísla 1, ..., n a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n + r - 1)!}{(r - 1)!}.$$

b) Přihrádky nesmí být prázdné:
Žádný oddělovač na začátku ani na konci, dva oddělovače nesmí být vedle sebe.

1.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozestavit n osob do front před r pokladnami?

Příklad: $n = 10$, $r = 3$, rozestavení $2\ \ 1\ \ 7\ \ 4 \mid 10\ \ 3\ \ 5 \mid 8\ \ 9\ \ 6$

Obecně: čísla $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel $1, \ldots, n$ a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!}.$$

b) Přihrádky nesmí být prázdné:
Žádný oddělovač na začátku ani na konci, dva oddělovače nesmí být vedle sebe. Počet možností je

$$\underbrace{n!}_{\text{permutace čísel}} \cdot \underbrace{\binom{n-1}{r-1}}_{\text{vložení oddělovačů do mezer}}.$$

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r - 1$ oddělovačů

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel n koleček a $r - 1$ oddělovačů.

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r-1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
   Libovolná permutace čísel n koleček a $r-1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n}.$$

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel n koleček a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n}.$$

Jiné řešení: neuspořádané n-tice z r osob s opakováním, tj. kombinace s opakováním

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel n koleček a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n}.$$

Jiné řešení: neuspořádané n-tice z r osob s opakováním, tj. kombinace s opakováním

b) Přihrádky nesmí být prázdné:
Žádný oddělovač na začátku ani na konci, dva oddělovače nesmí být vedle sebe.

1.2 Přihrádky rozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků r osobám?

Příklad: $n = 11$, $r = 4$, rozdělení $\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ$

Obecně: n koleček a $r - 1$ oddělovačů

a) Přihrádky mohou být prázdné:
Libovolná permutace čísel n koleček a $r - 1$ oddělovačů. Je jich

$$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{n}.$$

Jiné řešení: neuspořádané n-tice z r osob s opakováním, tj. kombinace s opakováním

b) Přihrádky nesmí být prázdné:
Žádný oddělovač na začátku ani na konci, dva oddělovače nesmí být vedle sebe. Počet možností je

$$\binom{n-1}{r-1}$$

(nakreslíme kolečka, vložíme oddělovače do mezer).

2.1 Přihrádky nerozlišitelné, předměty rozlišitelné

2.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit prvky n-prvkové množiny do r podmnožin?
Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků na r stejných talířů?

2.1 Přihrádky nerozlišitelné, předměty rozlišitelné

2.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit prvky n-prvkové množiny do r podmnožin?
Kolika způsoby lze rozdělit n různých zákusků na r stejných talířů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\begin{aligned} &\text{počet rozdělení do } r \text{ rozlišitelných přihrádek} = \\ &= r! \cdot (\text{počet rozdělení do } r \text{ nerozlišitelných přihrádek}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ počet rozdělení do r nerozlišitelných přihrádek je

$$\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)^n$$

(viz úlohu 1.1.1b)

Stirlingova čísla 2. druhu

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Stirlingova čísla 2. druhu

$$\left\{ n \atop r \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$, $\left\{ n \atop n \right\} = 1$.

Stirlingova čísla 2. druhu

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$.

(ii) Pokud $r > n$, pak $\left\{ {n \atop r} \right\} = 0$.

Stirlingova čísla 2. druhu

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$.

(ii) Pokud $r > n$, pak $\left\{ {n \atop r} \right\} = 0$.

(iii) Pokud $n \geq 2$ a $r \geq 2$, pak

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = \underbrace{\left\{ {n-1 \atop r-1} \right\}}_{n\text{-tý předmět je sám}} + \underbrace{r \cdot \left\{ {n-1 \atop r} \right\}}_{n\text{-tý předmět není sám}} .$$

2.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \ldots, r\}$, pak počet možností je $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

2.1.1 Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \ldots, r\}$, pak počet možností je $\left\{ n \atop k \right\}$.

Celkový počet možností je

$$\sum_{k=1}^{r} \left\{ n \atop k \right\}.$$

2.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do r zástupů?

2.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do r zástupů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\text{počet rozdělení do } r \text{ rozlišitelných přihrádek} =$$
$$= r! \cdot (\text{počet rozdělení do } r \text{ nerozlišitelných přihrádek})$$

2.1 Přihrádky nerozlišitelné, předměty rozlišitelné

2.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do r zástupů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\text{počet rozdělení do } r \text{ rozlišitelných přihrádek} =$$
$$= r! \cdot (\text{počet rozdělení do } r \text{ nerozlišitelných přihrádek})$$

$\Rightarrow$ počet rozdělení do r nerozlišitelných přihrádek je

$$\frac{n!}{r!}\binom{n-1}{r-1}.$$

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \ldots, r\}$, pak počet možností je $\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

2.1.2 Záleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Příklad úlohy: Kolika způsoby lze rozestavit n osob do r zástupů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:

$$\begin{aligned}&\text{počet rozdělení do } r \text{ rozlišitelných přihrádek} = \\ &= r! \cdot (\text{počet rozdělení do } r \text{ nerozlišitelných přihrádek})\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ počet rozdělení do r nerozlišitelných přihrádek je

$$\frac{n!}{r!}\binom{n-1}{r-1}.$$

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \ldots, r\}$, pak počet možností je $\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

Celkový počet možností je $\sum_{k=1}^{r} \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

2.2 Přihrádky nerozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů?

2.2 Přihrádky nerozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:
$p(n,r)$ = hledaný počet

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	2	1	1	0
5	1	2	2	1	1

2.2 Přihrádky nerozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:
$p(n, r)$ = hledaný počet

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	2	1	1	0
5	1	2	2	1	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $p(n, 1) = 1$, $p(n, n) = 1$.

2.2 Přihrádky nerozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:
$p(n,r)$ = hledaný počet

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	2	1	1	0
5	1	2	2	1	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $p(n,1) = 1$, $p(n,n) = 1$.

(ii) Pokud $r > n$, pak $p(n,r) = 0$.

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

Kolika způsoby lze rozdělit n stejných zákusků na r stejných talířů?

a) Přihrádky nesmí být prázdné:
$p(n, r)$ = hledaný počet

$n \backslash r$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	2	1	1	0
5	1	2	2	1	1

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

(i) $p(n, 1) = 1$, $p(n, n) = 1$.

(ii) Pokud $r > n$, pak $p(n, r) = 0$.

(iii) Pokud $n > r$, pak

$$p(n, r) = \underbrace{p(n-1, r-1)}_{\text{někde pouze 1 předmět}} + \underbrace{p(n-r, r)}_{\text{všude aspoň 2 předměty}}.$$

2.2 Přihrádky nerozlišitelné, předměty nerozlišitelné

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \ldots, r\}$, pak počet možností je $p(n, k)$.

$\Rightarrow$ Nezáleží na pořadí předmětů v přihrádkách.

b) Přihrádky mohou být prázdné:

Je-li neprázdných přihrádek $k \in \{1, \dots, r\}$, pak počet možností je $p(n, k)$.

Celkový počet možností je

$$\sum_{k=1}^{r} p(n, k).$$

Rozklady přirozených čísel

Kolika způsoby lze libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ rozložit na součet, přičemž nezáleží na pořadí sčítanců?

Rozklady přirozených čísel

Kolika způsoby lze libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ rozložit na součet, přičemž nezáleží na pořadí sčítanců?

- Rozdělování n jednotek do r nerozlišitelných neprázdných přihrádek

Rozklady přirozených čísel

Kolika způsoby lze libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ rozložit na součet, přičemž nezáleží na pořadí sčítanců?

- Rozdělování n jednotek do r nerozlišitelných neprázdných přihrádek
- Počet rozkladů n tvořených r sčítanci je $p(n, r)$.

Rozklady přirozených čísel

Kolika způsoby lze libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ rozložit na součet, přičemž nezáleží na pořadí sčítanců?

- Rozdělování n jednotek do r nerozlišitelných neprázdných přihrádek
- Počet rozkladů n tvořených r sčítanci je $p(n, r)$.
- Počet rozkladů n s libovolně mnoha sčítanci $\sum_{k=1}^{n} p(n, k)$.