Věžové polynomy a permutace s omezujícími podmínkami (dokončení)

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Opakování

Nechť je dán čtverec o rozměrech $n \times n$ rozdělený na jednotková políčka. Libovolná množina těchto políček se nazývá síť.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$v_k(S) = \text{počet způsobů, jak rozmístit } k \text{ neohrožujících se věží na políčka sítě } S.$$

Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo sloupci.

Dále definujeme $v_0(S) = 1$.

Polynom

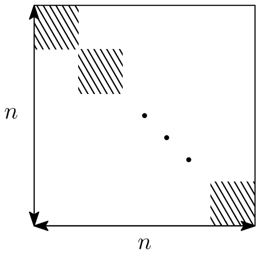
$$v(x, S) = \sum_{k \geq 0} v_k(S) x^k$$

se nazývá věžovým polynomem sítě S.

Nezávislé sítě

Dvě sítě S_1, S_2 ve čtverci $n \times n$ se nazývají nezávislé, pokud každá dvě políčka $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ leží v různých řádcích i sloupcích.

Věta. S_1, S_2 nezávislé $\Rightarrow v(x, S_1 \cup S_2) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2)$.

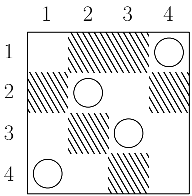


- n nezávislých sítí tvořených jedním políčkem
- Věžový polynom každé dílčí sítě je $1 + x$.
- Věžový polynom celé sítě je $v(x, S) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Permutace s omezujícími podmínkami

Je dáno $n \in \mathbb{N}$ a množiny $X_1, \dots, X_n \subset \{1, \dots, n\}$. Kolik existuje permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ takových, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $f(i) \notin X_i$?

- Omezující podmínky lze znázornit pomocí sítě S tvořené zakázanými pozicemi.
- Permutace vyhovující omezujícím podmínkám =
  = rozmístění n neohrožujících se věží na políčka vně sítě S



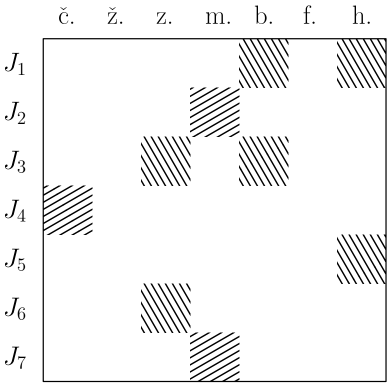
Příklad: $n = 4$ a $X_1 = \{2, 3\}$, $X_2 = \{1, 4\}$, $X_3 = \{2\}$, $X_4 = \{3\}$, permutace $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

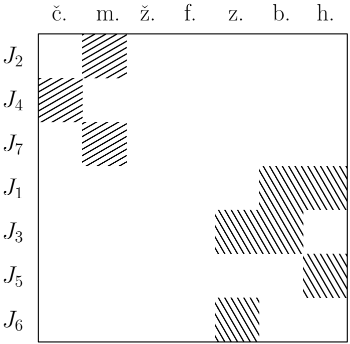
Jezevčíci (1)

Máme sedm jezevčíků $J_1, \ldots, J_7$ a sedm obojků: červený, žlutý, zelený, modrý, bílý, fialový a hnědý. Kolika způsoby lze jezevčíkům přiřadit tyto obojky, jestliže J_1 nechce bílý ani hnědý, J_2 modrý, J_3 bílý ani zelený, J_4 červený, J_5 hnědý, J_6 zelený a J_7 modrý?



Jezevčíci (2)

Permutujeme řádky a sloupce (neovlivní výsledek úlohy).



$$v(x,S_1)=1+3x+2x^2, \quad v(x,S_2)=1+6x+10x^2+4x^3$$

$$v(x,S)=(1+3x+2x^2)(1+6x+10x^2+4x^3)=1+9x+30x^2+46x^3+32x^4+8x^5.$$

Počet způsobů, jak přidělit jezevčíkům obojky, je

$$7!\cdot 1 - 6!\cdot 9 + 5!\cdot 30 - 4!\cdot 46 + 3!\cdot 32 - 2!\cdot 8 = 1\,232.$$

Permutace bez pevných bodů podruhé

Kolik existuje permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ takových, že $f(i) \neq i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$?

- $X_i = \{i\}$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$
- Síť ve čtverci $n \times n$ je tvořena n diagonálními políčky, $v_k(S) = \binom{n}{k}$ pro všechna $k \in \{0, \dots, n\}$.
- Počet permutací bez pevných bodů je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$