Věžové polynomy a permutace s omezujícími podmínkami

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

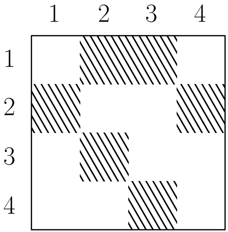
Výukové cíle

- Naučit se nové pojmy (síť, věžový polynom, nezávislé sítě, permutace s omezujícími podmínkami) a umět je ilustrovat na příkladech
- Umět převést úlohu o permutacích s omezujícími podmínkami na rozmísťování věží
- Ovládat použití vzorce pro počet permutací s omezujícími podmínkami při řešení konkrétních úloh

Sítě

Nechť je dán čtverec o rozměrech $n \times n$ rozdělený na jednotková políčka. Libovolná množina těchto políček se nazývá síť.

Příklad sítě ve čtverci 4×4:



$$S = \{[1,2],[1,3],[2,1],[2,4],[3,2],[4,3]\}.$$

Čísla $v_k(S)$ a věžové polynomy

Nechť je dána síť S. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$v_k(S) = \text{počet způsobů, jak rozmístit } k \text{ neohrožujících se věží na políčka sítě } S.$$

Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo sloupci. Uvažujeme pouze věže jedné barvy, tj. věže, které jsou navzájem nerozlišitelné.

Dále definujeme $v_0(S) = 1$.

Čísla $v_k(S)$ a věžové polynomy

Nechť je dána síť S. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$v_k(S) =$ počet způsobů, jak rozmístit k neohrožujících se věží na políčka sítě S.

Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo sloupci. Uvažujeme pouze věže jedné barvy, tj. věže, které jsou navzájem nerozlišitelné.

Dále definujeme $v_0(S) = 1$.

Polynom

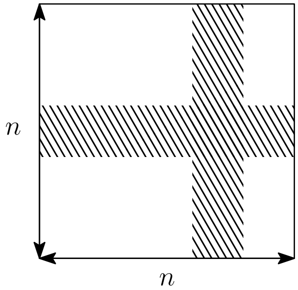
$$v(x, S) = \sum_{k \geq 0} v_k(S) x^k$$

se nazývá věžovým polynomem sítě S.

Součet v definici věžového polynomu je vždy konečný.

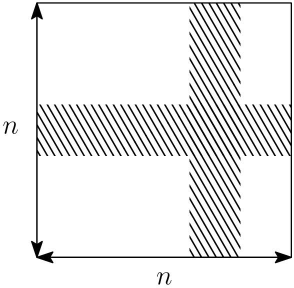
Příklady (1)

Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



Příklady (1)

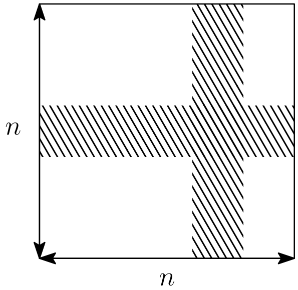
Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



- $v_0(S) = 1$

Příklady (1)

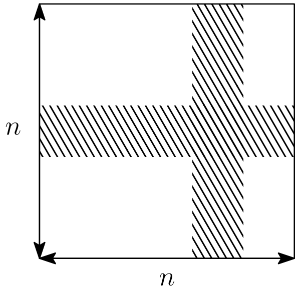
Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



- $v_0(S) = 1$
- $v_1(S) = 2n - 1$

Příklady (1)

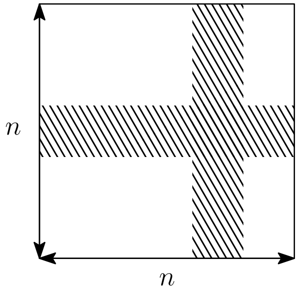
Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



- $v_0(S) = 1$
- $v_1(S) = 2n - 1$
- $v_2(S) = (n - 1)^2$

Příklady (1)

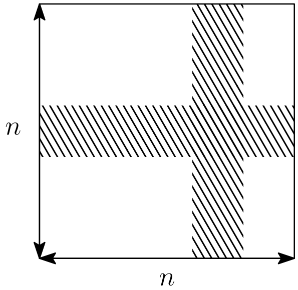
Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



- $v_0(S) = 1$
- $v_1(S) = 2n - 1$
- $v_2(S) = (n-1)^2$
- $v_k(S) = 0$ pro každé $k > 2$

Příklady (1)

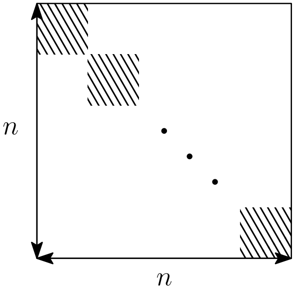
Najděte věžový polynom sítě tvořené jedním řádkem a jedním sloupcem.



- $v_0(S) = 1$
- $v_1(S) = 2n - 1$
- $v_2(S) = (n-1)^2$
- $v_k(S) = 0$ pro každé $k > 2$
- Věžový polynom je $v(x, S) = 1 + (2n-1)x + (n-1)^2x^2$.

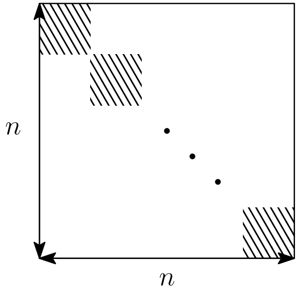
Příklady (2)

Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi diagonálními políčky.



Příklady (2)

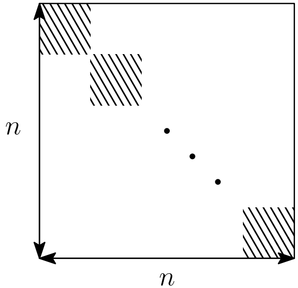
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi diagonálními políčky.



- $v_0(S) = 1$

Příklady (2)

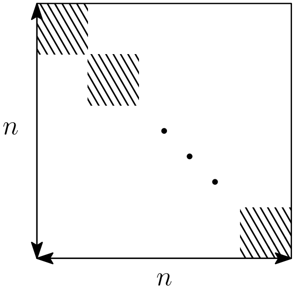
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi diagonálními políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = \binom{n}{k}$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$

Příklady (2)

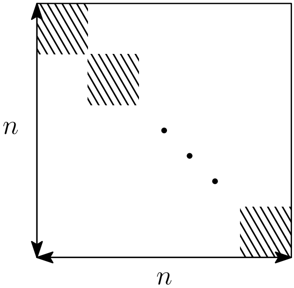
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi diagonálními políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = \binom{n}{k}$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$
- $v_k(S) = 0$ pro každé $k > n$

Příklady (2)

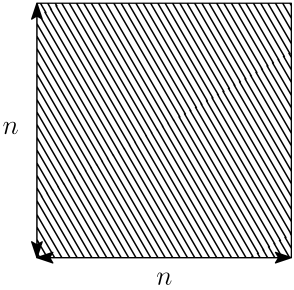
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi diagonálními políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = \binom{n}{k}$ pro každé $k \in \{1, \ldots, n\}$
- $v_k(S) = 0$ pro každé $k > n$
- Věžový polynom je
  $v(x, S) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n$.

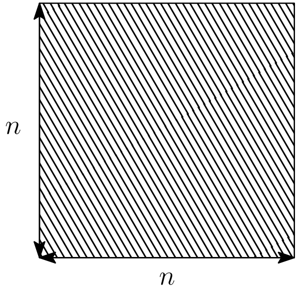
Příklady (3)

Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



Příklady (3)

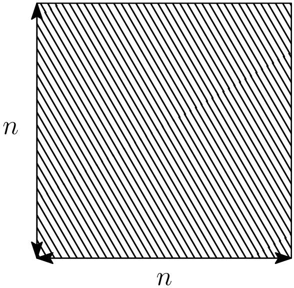
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



- $v_0(S) = 1$

Příklady (3)

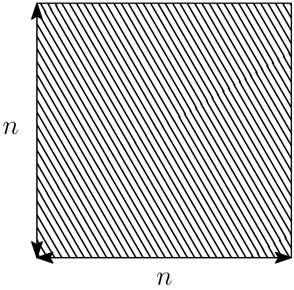
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = 0$ pro všechna $k > n$

Příklady (3)

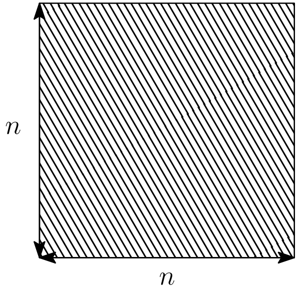
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = 0$ pro všechna $k > n$
- $v_n(S) = n!$

Příklady (3)

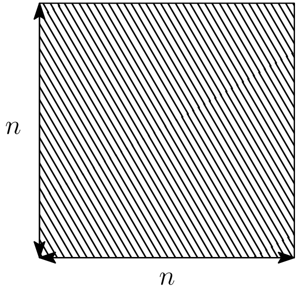
Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = 0$ pro všechna $k > n$
- $v_n(S) = n!$
- $v_k(S) = \binom{n}{k}^2 k!$ pro všechna $k \in \{0, \dots, n\}$

Příklady (3)

Najděte věžový polynom sítě tvořené všemi políčky.



- $v_0(S) = 1$
- $v_k(S) = 0$ pro všechna $k > n$
- $v_n(S) = n!$
- $v_k(S) = \binom{n}{k}^2 k!$ pro všechna $k \in \{0, \ldots, n\}$
- Věžový polynom je $v(x, S) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k! x^k$.

Nezávislé sítě

Dvě sítě S_1, S_2 ve čtverci $n \times n$ se nazývají nezávislé, pokud každá dvě políčka $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ leží v různých řádcích i sloupcích.

Nezávislé sítě

Dvě sítě S_1, S_2 ve čtverci $n \times n$ se nazývají nezávislé, pokud každá dvě políčka $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ leží v různých řádcích i sloupcích.

Věta. S_1, S_2 nezávislé $\Rightarrow v(x, S_1 \cup S_2) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2)$.

Nezávislé sítě

Dvě sítě S_1, S_2 ve čtverci $n \times n$ se nazývají nezávislé, pokud každá dvě políčka $p_1 \in S_1$, $p_2 \in S_2$ leží v různých řádcích i sloupcích.

Věta. S_1, S_2 nezávislé $\Rightarrow v(x, S_1 \cup S_2) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2)$.

Důkaz.

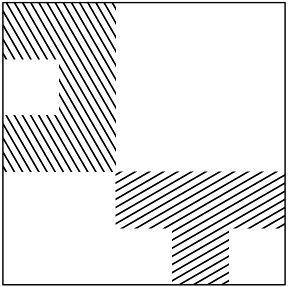
$$v_k(S_1 \cup S_2) = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{v_i(S_1)}_{i \text{ věží na } S_1} \cdot \underbrace{v_{k-i}(S_2)}_{k-i \text{ věží na } S_2}$$

$$v(x, S_1) \cdot v(x, S_2) = \left(\sum_{l \geq 0} v_l(S_1) x^l \right) \left(\sum_{m \geq 0} v_m(S_2) x^m \right) =$$

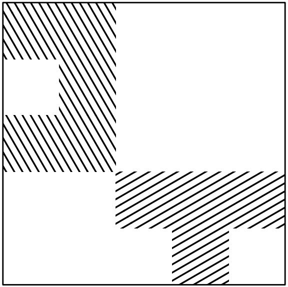
$$= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{k} v_i(S_1) v_{k-i}(S_2) \right) x^k =$$

$$= \sum_{k \geq 0} v_k(S_1 \cup S_2) x^k = v(x, S_1 \cup S_2).$$

Nezávislé sítě – příklad

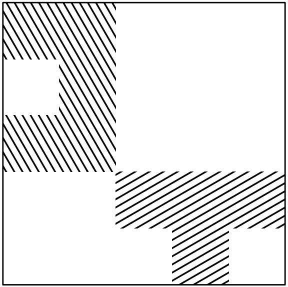


Nezávislé sítě – příklad



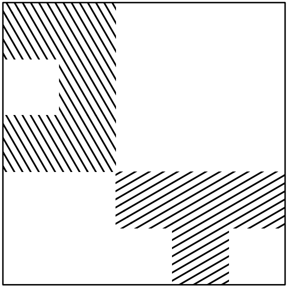
$$v(x, S_1) = 1 + 5x + 4x^2$$

Nezávislé sítě – příklad



$$v(x, S_1) = 1 + 5x + 4x^2$$
$$v(x, S_2) = 1 + 4x + 2x^2$$

Nezávislé sítě – příklad



$v(x, S_1) = 1 + 5x + 4x^2$

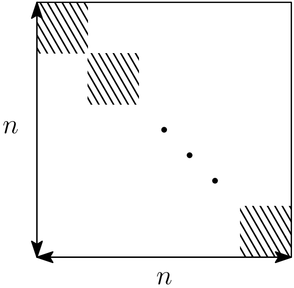
$v(x, S_2) = 1 + 4x + 2x^2$

Věžový polynom celé sítě je

$$v(x, S) = v(x, S_1) \cdot v(x, S_2) = (1 + 5x + 4x^2) \cdot (1 + 4x + 2x^2) = \\ = 1 + 9x + 26x^2 + 26x^3 + 8x^4.$$

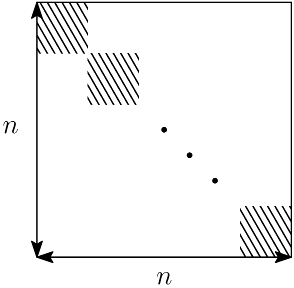
Více nezávislých sítí

Větu o násobení věžových polynomů nezávislých sítí lze indukcí rozšířit na více než dvě sítě.



Více nezávislých sítí

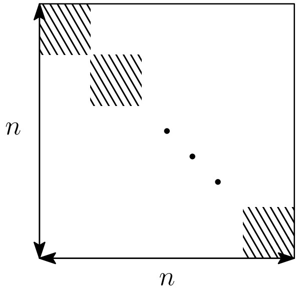
Větu o násobení věžových polynomů nezávislých sítí lze indukcí rozšířit na více než dvě sítě.



- n nezávislých sítí tvořených jedním políčkem

Více nezávislých sítí

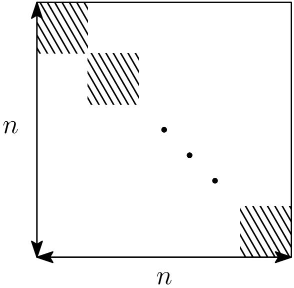
Větu o násobení věžových polynomů nezávislých sítí lze indukcí rozšířit na více než dvě sítě.



- n nezávislých sítí tvořených jedním políčkem
- Věžový polynom každé dílčí sítě je $1 + x$.

Více nezávislých sítí

Větu o násobení věžových polynomů nezávislých sítí lze indukcí rozšířit na více než dvě sítě.



- n nezávislých sítí tvořených jedním políčkem
- Věžový polynom každé dílčí sítě je $1 + x$.
- Věžový polynom celé sítě je $v(x, S) = (1 + x)^n$.

Rozklad na menší sítě

Věta. Nechť je dána síť S a políčko $w \in S$. Jestliže S_w značí síť $S \setminus \{w\}$ a S'_w značí síť vzniklou ze sítě S odstraněním všech políček ležících ve stejném řádku nebo sloupci jako w, pak

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w).$$

Rozklad na menší sítě

Věta. Nechť je dána síť S a políčko $w \in S$. Jestliže S_w značí síť $S \setminus \{w\}$ a S'_w značí síť vzniklou ze sítě S odstraněním všech políček ležících ve stejném řádku nebo sloupci jako w, pak

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w).$$

Důkaz. Pro $k \geq 1$ platí $v_k(S) = \underbrace{v_k(S_w)}_{\text{na } w \text{ není věž}} + \underbrace{v_{k-1}(S'_w)}_{\text{na } w \text{ je věž}}$.

Věta. Nechť je dána síť S a políčko $w \in S$. Jestliže S_w značí síť $S \setminus \{w\}$ a S'_w značí síť vzniklou ze sítě S odstraněním všech políček ležících ve stejném řádku nebo sloupci jako w, pak

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w).$$

Důkaz. Pro $k \geq 1$ platí $v_k(S) = \underbrace{v_k(S_w)}_{\text{na } w \text{ není věž}} + \underbrace{v_{k-1}(S'_w)}_{\text{na } w \text{ je věž}}$.

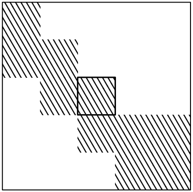
$$v(x, S) = \sum_{k \geq 0} v_k(S) x^k = 1 + \sum_{k \geq 1} v_k(S) x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} \left(v_k(S_w) + v_{k-1}(S'_w) \right) x^k = 1 + \sum_{k \geq 1} v_k(S_w) x^k + \sum_{k \geq 1} v_{k-1}(S'_w) x^k =$$

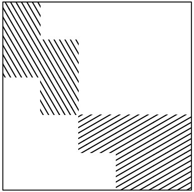
$$= \sum_{k \geq 0} v_k(S_w) x^k + x \cdot \sum_{k \geq 1} v_{k-1}(S'_w) x^{k-1} = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w).$$

Rozklad na menší sítě – příklad

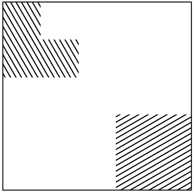
Síť S



Síť S_w



Síť S'_w



$$v(x, S'_w) = (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2),$$
$$v(x, S_w) = (1 + 4x + 3x^2)(1 + 5x + 4x^2),$$

$$v(x, S) = v(x, S_w) + x \cdot v(x, S'_w) = 1 + 10x + 34x^2 + 46x^3 + 22x^4 + 2x^5$$

Permutace s omezujícími podmínkami

Je dáno $n \in \mathbb{N}$ a množiny $X_1, \ldots, X_n \subset \{1, \ldots, n\}$. Kolik existuje permutací $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ takových, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(i) \notin X_i$?

Permutace s omezujícími podmínkami

Je dáno $n \in \mathbb{N}$ a množiny $X_1, \ldots, X_n \subset \{1, \ldots, n\}$. Kolik existuje permutací $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ takových, že pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $f(i) \notin X_i$?

Příklad: $X_i = \{i\} \Rightarrow$ permutace bez pevných bodů

Permutace s omezujícími podmínkami

Je dáno $n \in \mathbb{N}$ a množiny $X_1, \dots, X_n \subset \{1, \dots, n\}$. Kolik existuje permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ takových, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $f(i) \notin X_i$?

Příklad: $X_i = \{i\} \Rightarrow$ permutace bez pevných bodů

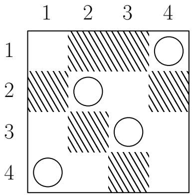
- Omezující podmínky lze znázornit pomocí sítě S tvořené zakázanými pozicemi.
- Permutace vyhovující omezujícím podmínkám =
  = rozmístění n neohrožujících se věží na políčka vně sítě S

Permutace s omezujícími podmínkami

Je dáno $n \in \mathbb{N}$ a množiny $X_1, \dots, X_n \subset \{1, \dots, n\}$. Kolik existuje permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ takových, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $f(i) \notin X_i$?

Příklad: $X_i = \{i\} \Rightarrow$ permutace bez pevných bodů

- Omezující podmínky lze znázornit pomocí sítě S tvořené zakázanými pozicemi.
- Permutace vyhovující omezujícím podmínkám =
= rozmístění n neohrožujících se věží na políčka vně sítě S



Příklad: $n = 4$ a $X_1 = \{2, 3\}$, $X_2 = \{1, 4\}$, $X_3 = \{2\}$, $X_4 = \{3\}$, permutace $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Důkaz. Použijeme princip inkluze a exkluze.

$A =$ všechna rozmístění n neohrožujících se věží ve čtverci $n \times n$

$A_i =$ všechna rozmístění, kde věž v i-tém řádku stojí na políčku sítě S

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Důkaz. Použijeme princip inkluze a exkluze.

$A =$ všechna rozmístění n neohrožujících se věží ve čtverci $n \times n$

$A_i =$ všechna rozmístění, kde věž v i-tém řádku stojí na políčku sítě S

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Věta. Počet permutací $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Důkaz. Použijeme princip inkluze a exkluze.

$A =$ všechna rozmístění n neohrožujících se věží ve čtverci $n \times n$

$A_i =$ všechna rozmístění, kde věž v i-tém řádku stojí na políčku sítě S

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Platí $|A| = n!$, $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = v_k(S)(n-k)!$.

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Důkaz. Použijeme princip inkluze a exkluze.

$A =$ všechna rozmístění n neohrožujících se věží ve čtverci $n \times n$

$A_i =$ všechna rozmístění, kde věž v i-tém řádku stojí na políčku sítě S

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Platí $|A| = n!$, $\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = v_k(S)(n-k)!$.
Komentář: $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ = počet rozmístění n neohrožujících se věží, kde věže v řádcích $i_1, \dots, i_k$ stojí na síti S.

Počet permutací s omezujícími podmínkami

Věta. Počet permutací $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ s omezujícími podmínkami odpovídajícími síti S je $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k(S)(n-k)!$.

Důkaz. Použijeme princip inkluze a exkluze.

A = všechna rozmístění n neohrožujících se věží ve čtverci $n \times n$

A_i = všechna rozmístění, kde věž v i-tém řádku stojí na políčku sítě S

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Platí $|A| = n!$, $\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = v_k(S)(n-k)!$.

Komentář: $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$ = počet rozmístění n neohrožujících se věží, kde věže v řádcích $i_1, \dots, i_k$ stojí na síti S.

Nechť věže v řádcích $i_1, \dots, i_k$ jsou černé, ostatní bílé.

Nasčítáním přes $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ dostaneme počet všech rozmístění n neohrožujících se věží, kde černé stojí na S a bílé mohou stát kdekoliv, tj. $v_k(S)(n-k)!$.

Poznámka

Proč umísťujeme věže mimo políčka sítě S?

Alternativní postup: Vezmeme doplňkovou síť $\overline{S}$ (= povolené pozice) a vypočteme $v_n(\overline{S})$.

Omezujících podmínek bývá většinou málo, síť S je malá, $\overline{S}$ je velká.

Permutace s omezujícími podmínkami – příklad

Pět dam se rozhodlo pořídit společnou fotografii. Kolika způsoby mohou utvořit řadu, jestliže první dáma nechce stát uprostřed, třetí nechce stát na kraji a pátá chce být na kraji?

Permutace s omezujícími podmínkami – příklad

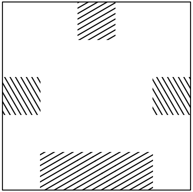
Pět dam se rozhodlo pořídit společnou fotografii. Kolika způsoby mohou utvořit řadu, jestliže první dáma nechce stát uprostřed, třetí nechce stát na kraji a pátá chce být na kraji?

Permutace $\{1, \dots, 5\}$ s omezujícími podmínkami $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \emptyset$, $X_3 = \{1, 5\}$, $X_4 = \emptyset$, $X_5 = \{2, 3, 4\}$.

Permutace s omezujícími podmínkami – příklad

Pět dam se rozhodlo pořídit společnou fotografii. Kolika způsoby mohou utvořit řadu, jestliže první dáma nechce stát uprostřed, třetí nechce stát na kraji a pátá chce být na kraji?

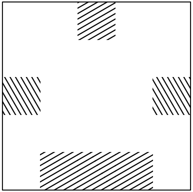
Permutace $\{1, \dots, 5\}$ s omezujícími podmínkami $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \emptyset$, $X_3 = \{1, 5\}$, $X_4 = \emptyset$, $X_5 = \{2, 3, 4\}$.



Permutace s omezujícími podmínkami – příklad

Pět dam se rozhodlo pořídit společnou fotografii. Kolika způsoby mohou utvořit řadu, jestliže první dáma nechce stát uprostřed, třetí nechce stát na kraji a pátá chce být na kraji?

Permutace $\{1, \dots, 5\}$ s omezujícími podmínkami $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \emptyset$, $X_3 = \{1, 5\}$, $X_4 = \emptyset$, $X_5 = \{2, 3, 4\}$.

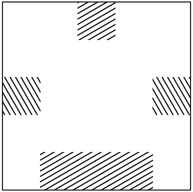


$$v(x, S_1) = 1 + 2x, \quad v(x, S_2) = 1 + 4x + 2x^2,$$

$$v(x, S) = (1 + 2x)(1 + 4x + 2x^2) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

Pět dam se rozhodlo pořídit společnou fotografii. Kolika způsoby mohou utvořit řadu, jestliže první dáma nechce stát uprostřed, třetí nechce stát na kraji a pátá chce být na kraji?

Permutace $\{1, \dots, 5\}$ s omezujícími podmínkami $X_1 = \{3\}$, $X_2 = \emptyset$, $X_3 = \{1,5\}$, $X_4 = \emptyset$, $X_5 = \{2,3,4\}$.

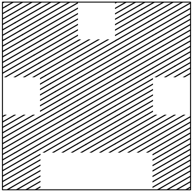


$$v(x, S_1) = 1 + 2x, \quad v(x, S_2) = 1 + 4x + 2x^2,$$

$$v(x, S) = (1+2x)(1+4x+2x^2) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3.$$

Počet permutací je
$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k(S)(n-k)! = 5! \cdot 1 - 4! \cdot 6 + 3! \cdot 10 - 2! \cdot 4 = 28.$

Alternativní řešení pomocí doplňkové sítě $\overline{S}$:



Počítačový výpočet:

$$v(x, \overline{S}) = 1 + 19x + 114x^2 + 254x^3 + 188x^4 + 28x^5.$$

$v_5(\overline{S}) = 28$ je v souladu s předchozím výsledkem.