Princip inkluze a exkluze

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Kombinatorické pravidlo součtu a zobecnění

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné disjunktní množiny, pak

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Co když nejsou disjunktní?

Kombinatorické pravidlo součtu a zobecnění

Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné disjunktní množiny, pak

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Co když nejsou disjunktní?

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Kombinatorické pravidlo součtu a zobecnění

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné disjunktní množiny, pak

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Co když nejsou disjunktní?

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Kombinatorické pravidlo součtu a zobecnění

Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné disjunktní množiny, pak

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Co když nejsou disjunktní?

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Charakteristické funkce

Nechť je pevně zvolena konečná množina A. Charakteristická funkce její podmnožiny M je funkce $\chi_M : A \to \{0,1\}$ definovaná předpisem

$$\chi_M(a) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \in M, \\ 0 & \text{pokud } a \notin M. \end{cases}$$

Označení: $\overline{M} = A \setminus M$

Vlastnosti:

(i) Pokud $M \subset A$, pak platí $\chi_{\overline{M}}(a) = 1 - \chi_M(a)$ pro každé $a \in A$.

(ii) Pokud $M, N \subset A$, pak platí $\chi_{M \cap N}(a) = \chi_M(a) \cdot \chi_N(a)$ pro každé $a \in A$.

(iii) Pokud $M \subset A$, pak $|M| = \sum_{a \in A} \chi_M(a)$.

Dvě varianty principu inkluze a exkluze

Věta

Pokud A je konečná množina a $A_1, \ldots, A_n \subset A$, pak platí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Dvě varianty principu inkluze a exkluze

Věta

Pokud A je konečná množina a $A_1, \ldots, A_n \subset A$, pak platí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|,$$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Platí $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$, a proto $\displaystyle\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$.

Vztahy ve větě jsou tedy ekvivalentní.

Důkaz

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right| \overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{a\in A}\chi_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n}}(a) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{a\in A}\chi_{\overline{A_1}}(a)\cdots\chi_{\overline{A_n}}(a) \overset{\text{(i)}}{=}$$

$$\overset{\text{(i)}}{=} \sum_{a\in A}(1-\chi_{A_1}(a))\cdots(1-\chi_{A_n}(a)) =$$

$$= \sum_{a\in A}1 + \sum_{a\in A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(-\chi_{A_{i_1}}(a))\cdots(-\chi_{A_{i_k}}(a)) =$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=} |A| + \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{a\in A}(-1)^k\chi_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}(a) \overset{\text{(iii)}}{=}$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=} |A| - \sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(-1)^{k-1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|.$$

Počítání násobků

Kolik existuje přirozených čísel menších než 100, která jsou násobky tří nebo čtyř?

Počítání násobků

Kolik existuje přirozených čísel menších než 100, která jsou násobky tří nebo čtyř?

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, 99\}, \\ A_1 &= \{3, 6, \dots, 99\}, \\ A_2 &= \{4, 8, \dots, 96\}. \end{aligned}$$

Počítání násobků

Kolik existuje přirozených čísel menších než 100, která jsou násobky tří nebo čtyř?

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, 99\}, \\ A_1 &= \{3, 6, \dots, 99\}, \\ A_2 &= \{4, 8, \dots, 96\}. \end{aligned}$$

Chceme

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Platí $|A_1| = \lfloor 99/3 \rfloor = 33$, $|A_2| = \lfloor 99/4 \rfloor = 24$.

Počítání násobků

Kolik existuje přirozených čísel menších než 100, která jsou násobky tří nebo čtyř?

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, \dots, 99\}, \\
A_1 &= \{3, 6, \dots, 99\}, \\
A_2 &= \{4, 8, \dots, 96\}.
\end{aligned}
$$

Chceme

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Platí $|A_1| = \lfloor 99/3 \rfloor = 33$, $|A_2| = \lfloor 99/4 \rfloor = 24$.

$A_1 \cap A_2$ obsahuje násobky 12 menší než 100,
$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 99/12 \rfloor = 8$.

Celkem $|A_1 \cup A_2| = 33 + 24 - 8 = 49$.

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$
\begin{aligned}
A &= \text{všechna seřazení devíti osob,} \\
A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,} \\
A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,} \\
A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.}
\end{aligned}
$$

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna seřazení devíti osob,} \\ A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,} \\ A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,} \\ A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.} \end{aligned}$$

Chceme

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \\ + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna seřazení devíti osob,}\\ A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,}\\ A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,}\\ A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.} \end{aligned}$$

Chceme

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = {} & |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \\ & + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Platí $|A| = 9!$,

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna seřazení devíti osob,} \\ A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,} \\ A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,} \\ A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.} \end{aligned}$$

Chceme

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = {} & |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \\ & + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Platí $|A| = 9!$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 7! \cdot 3!$,

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna seřazení devíti osob,} \\ A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,} \\ A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,} \\ A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.} \end{aligned}$$

Chceme

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \\ + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Platí $|A| = 9!$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 7! \cdot 3!$,

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 5!(3!)^2$,

Skandinávská řada

Kolika způsoby lze sestavit řadu ze tří Finů, tří Norů a tří Švédů tak, aby vedle sebe nestály tři osoby téže národnosti?

$$\begin{aligned} A &= \text{všechna seřazení devíti osob,} \\ A_1 &= \text{seřazení, kde tři Finové stojí vedle sebe,} \\ A_2 &= \text{seřazení, kde tři Norové stojí vedle sebe,} \\ A_3 &= \text{seřazení, kde tři Švédové stojí vedle sebe.} \end{aligned}$$

Chceme

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \\ + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Platí $|A| = 9!$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 7! \cdot 3!$,

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 5!(3!)^2$, $\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (3!)^4$.

Celkem $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 283\,824$.

Typické použití principu inkluze a exkluze

Máme vypočítat počet konfigurací splňujících jistých n podmínek.

Za A_i vezmeme množinu konfigurací porušujících i-tou podmínku.

Počítáme $|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$.

Taneční dvojice

Kolika způsoby lze z n manželských párů vytvořit taneční dvojice tak, aby žádní manželé netančili spolu?

Taneční dvojice

Kolika způsoby lze z n manželských párů vytvořit taneční dvojice tak, aby žádní manželé netančili spolu?

D_n = hledaný počet

$D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$

muž	1	2	3
žena	2	3	1

muž	1	2	3
žena	3	1	2

Taneční dvojice

Kolika způsoby lze z n manželských párů vytvořit taneční dvojice tak, aby žádní manželé netančili spolu?

D_n = hledaný počet

$D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$

muž	1	2	3
žena	2	3	1

muž	1	2	3
žena	3	1	2

První řádek: čísla $1, \ldots, n$ (v tomto pořadí)

Druhý řádek: permutace čísel $1, \ldots, n$

V jednom sloupci nesmí být dvě stejná čísla!

Permutace bez pevných bodů

Permutace je bijekce $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Prvek $i \in \{1, \dots, n\}$ je pevným bodem f, pokud $f(i) = i$.

D_n = počet permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ bez pevných bodů

Počet permutací bez pevných bodů

$A =$ všechny permutace $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$,

$A_i =$ všechny permutace $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, kde $f(i) = i$.

Počet permutací bez pevných bodů

$$\begin{aligned} A &= \text{ všechny permutace } f: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\},\\ A_i &= \text{ všechny permutace } f: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}, \text{ kde } f(i) = i. \end{aligned}$$

Platí

$$D_n = \left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |A| - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| =$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (n-k)! =$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n!}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{n!}{k!}.$$

Shrnutí

Počet permutací n-prvkové množiny bez pevných bodů je

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Pány a klobouky očíslujeme $1, \dots, n$ (pán i je vlastníkem i-tého klobouku).

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Pány a klobouky očíslujeme $1, \dots, n$ (pán i je vlastníkem i-tého klobouku).

Přidělování klobouků = permutace $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Pány a klobouky očíslujeme $1, \ldots, n$ (pán i je vlastníkem i-tého klobouku).

Přidělování klobouků = permutace $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Pán i nedostane svůj kloubouk, pokud $f(i) \neq i$.

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Pány a klobouky očíslujeme $1, \dots, n$ (pán i je vlastníkem i-tého klobouku).

Přidělování klobouků = permutace $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Pán i nedostane svůj kloubouk, pokud $f(i) \neq i$.

Hledaná pravděpodobnost je $P_n = \dfrac{D_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

n	1	2	3	4	5	6
P_n	0	0,5	0,33	0,38	0,37	0,37

Úloha o šatnářce

n pánů si jde do šatny vyzvednout klobouky. Šatnářka vydává klobouky náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk?

Pány a klobouky očíslujeme $1, \dots, n$ (pán i je vlastníkem i-tého klobouku).

Přidělování klobouků = permutace $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Pán i nedostane svůj kloubouk, pokud $f(i) \neq i$.

Hledaná pravděpodobnost je $P_n = \dfrac{D_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

n	1	2	3	4	5	6
P_n	0	0,5	0,33	0,38	0,37	0,37

Platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1} \doteq 0{,}37$.