Základy kombinatoriky

Antonín Slavík

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Katedra didaktiky matematiky

Úvodní informace

- Email: antonin.slavik@matfyz.cuni.cz
- K dispozici elektronická skripta (https://www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/info.html)
- Kombinace přednášky a cvičení (řešení úloh samostatně / ve dvojicích)
- Písemná zkouška: teoretické otázky, úlohy řešené na přednášce, další úlohy podobného typu

Pokud něčemu nebudete rozumět, nemusí to být vaše chyba, ale moje. Zeptejte se.

Proč je kombinatorika nepopulární?

- Nemám buňky na kombinatoriku.
- Obtížné hledání chyb.
- Nudné (pseudoaplikační) úlohy.
- Přehnaný důraz na formalismus.

Výukové cíle

- Umět zformulovat kombinatorická pravidla součtu a součinu, ilustrovat je na příkladech.
- Znát odvození vztahů pro variace, permutace a kombinace (bez opakování, s opakováním), umět tyto pojmy a vztahy ilustrovat na příkladech.
- Ovládat použití základních kombinatorických principů při řešení konkrétních úloh.

Kombinatorické pravidlo součinu (1)

Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby, je $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Kombinatorické pravidlo součinu (1)

Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby, je $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Úloha. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže a) cifry se mohou opakovat, b) cifry se nesmí opakovat?

Kombinatorické pravidlo součinu (1)

Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby, je $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Úloha. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže a) cifry se mohou opakovat, b) cifry se nesmí opakovat?

Řešení.

a) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$ možností

Kombinatorické pravidlo součinu (1)

Počet uspořádaných k-tic, jejichž i-tý člen lze vybrat n_i způsoby, je $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Úloha. Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže a) cifry se mohou opakovat, b) cifry se nesmí opakovat?

Řešení.

a) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$ možností

b) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ možností

Kombinatorické pravidlo součinu (2)

Úloha. Kolik kladných dělitelů má číslo 2 880?

Úloha. Kolik kladných dělitelů má číslo 2 880?

Řešení.

Najdeme prvočíselný rozklad:

$$2\,880 = 10\cdot 288 = 2^2\cdot 5\cdot 144 = 2^2\cdot 5\cdot 12^2 = 2^2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5.$$

Úloha. Kolik kladných dělitelů má číslo 2 880?

Řešení.

Najdeme prvočíselný rozklad:

$$2\,880 = 10\cdot 288 = 2^2\cdot 5\cdot 144 = 2^2\cdot 5\cdot 12^2 = 2^2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5.$$

Všichni kladní dělitelé tedy mají tvar

$$2^i\cdot 3^j\cdot 5^k,\ \text{kde } i\in\{0,1,\dots,6\},\ j\in\{0,1,2\},\ k\in\{0,1\}.$$

Kombinatorické pravidlo součinu (2)

Úloha. Kolik kladných dělitelů má číslo 2 880?

Řešení.

Najdeme prvočíselný rozklad:

$$2\,880 = 10\cdot 288 = 2^2\cdot 5\cdot 144 = 2^2\cdot 5\cdot 12^2 = 2^2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 3^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 5.$$

Všichni kladní dělitelé tedy mají tvar

$$2^i\cdot 3^j\cdot 5^k,\ \text{kde } i\in\{0,1,\dots,6\},\ j\in\{0,1,2\},\ k\in\{0,1\}.$$

Jejich počet je $7\cdot 3\cdot 2 = 42$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$$

(kde $|X|$ = počet prvků množiny X).

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$$

(kde $|X|$ = počet prvků množiny X).

Úloha. Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

(kde $|X|$ = počet prvků množiny X).

Úloha. Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Řešení.

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{přípustná čísla končící } 0, \\ A_2 &= \text{přípustná čísla končící } 2, \\ A_3 &= \text{přípustná čísla končící } 4. \end{aligned}$$

Chceme znát $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

(kde $|X|$ = počet prvků množiny X).

Úloha. Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Řešení.

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{přípustná čísla končící } 0, \\ A_2 &= \text{přípustná čísla končící } 2, \\ A_3 &= \text{přípustná čísla končící } 4. \end{aligned}$$

Chceme znát $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

Platí $|A_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$,

Kombinatorické pravidlo součtu

Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, přičemž každé dvě jsou disjunktní, pak platí

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$$

(kde $|X|$ = počet prvků množiny X).

Úloha. Kolik sudých čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Řešení.

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{přípustná čísla končící 0}, \\ A_2 &= \text{přípustná čísla končící 2}, \\ A_3 &= \text{přípustná čísla končící 4}. \end{aligned}$$

Chceme znát $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

Platí $|A_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, $|A_2| = |A_3| = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

Celkem $|A_1| + |A_2| + |A_3| = 156$.

Poznámka

Pravidla součtu a součinu jsou v kombinatorice většinou považována za axiomy; jde o intuitivně zřejmá tvrzení, která se nedokazují.

Je možný i alternativní přístup, kdy budujeme matematiku na základě teorie množin a z ní pak odvodíme obě kombinatorická pravidla.

Variace, permutace, kombinace

- Dána n-prvková množina
$$A = \{a_1, \dots, a_n\}.$$
- Sestavujeme k-tice z prvků množiny A.
- Uspořádané k-tice (záleží na pořadí vybraných prvků) nebo neuspořádané k-tice (nezáleží na pořadí)?
- Prvky v k-tici se nesmí, nebo mohou opakovat?

Variace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Variace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Důkaz: Tvrzení plyne z kombinatorického pravidla součinu.

Variace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Důkaz: Tvrzení plyne z kombinatorického pravidla součinu.

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k různých zákusků pro k kamarádů (každý dostane 1 zákusek)?

Permutace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných n-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v n-tici vyskytne právě jednou, je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

Permutace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných n-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v n-tici vyskytne právě jednou, je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

Důkaz: Jde o speciální případ variací bez opakování pro $k = n$.

Permutace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných n-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v n-tici vyskytne právě jednou, je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

Důkaz: Jde o speciální případ variací bez opakování pro $k = n$.

Poznámka: Definujeme též $0! = 1$.

Permutace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných n-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v n-tici vyskytne právě jednou, je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

Důkaz: Jde o speciální případ variací bez opakování pro $k = n$.

Poznámka: Definujeme též $0! = 1$.

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Od každého druhu koupíme 1 zákusek. Kolik existuje různých pořadí konzumace?

Kombinace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Kombinace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Důkaz: Pro počty uspořádaných a neuspořádaných k-tic sestavených z prvků množiny A platí

$$\text{počet uspořádaných } k\text{-tic} =$$

$$= (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) \cdot (\text{počet způsobů, jak uspořádat jednu } k\text{-tici}).$$

Kombinace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Důkaz: Pro počty uspořádaných a neuspořádaných k-tic sestavených z prvků množiny A platí

$$\text{počet uspořádaných } k\text{-tic} =$$
$$= (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) \cdot (\text{počet způsobů, jak uspořádat jednu } k\text{-tici}).$$

Poznámka: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Kombinace bez opakování

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek se v k-tici vyskytne nejvýše jednou, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Důkaz: Pro počty uspořádaných a neuspořádaných k-tic sestavených z prvků množiny A platí

$$\text{počet uspořádaných } k\text{-tic} =$$

$$= (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) \cdot (\text{počet způsobů, jak uspořádat jednu } k\text{-tici}).$$

Poznámka: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k různých zákusků?

Variace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A je n^k.

Variace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A je n^k.

Důkaz: Tvrzení plyne z kombinatorického pravidla součinu.

Variace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A je n^k.

Důkaz: Tvrzení plyne z kombinatorického pravidla součinu.

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k zákusků pro k kamarádů (každý dostane 1 zákusek)?

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek a_i se v k-tici vyskytne k_i-krát (přičemž $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a $k_1 + \cdots + k_n = k$), je

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}.$$

Permutace s opakováním (1)

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet uspořádaných k-tic sestavených z prvků A tak, že každý prvek a_i se v k-tici vyskytne k_i-krát (přičemž $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ a $k_1 + \dots + k_n = k$), je

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}.$$

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Od i-tého druhu jsme koupili k_i zákusků, celkem máme $k = k_1 + \dots + k_n$ zákusků. Kolika způsoby je lze rozdělit k kamarádům (každý dostane 1 zákusek)?

Permutace s opakováním – 1. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2\text{-krát}}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Permutace s opakováním – 1. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2\text{-krát}}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Stejné prvky rozlišíme doplněním horních indexů:

$$a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, a_2^1, \dots, a_2^{k_2}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n}.$$

Permutace s opakováním – 1. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k_2\text{-krát}}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Stejné prvky rozlišíme doplněním horních indexů:

$$a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, a_2^1, \dots, a_2^{k_2}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n}.$$

$$\text{počet } k\text{-tic s indexy} =$$

$$= (\text{počet } k\text{-tic bez indexů}) \cdot (\text{počet způsobů, jak k libovolné } k\text{-tici doplnit indexy}).$$

Permutace s opakováním – 1. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{k_1\text{-krát}},\underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{k_2\text{-krát}},\ldots,\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Stejné prvky rozlišíme doplněním horních indexů:

$$a_1^1,\ldots,a_1^{k_1},a_2^1,\ldots,a_2^{k_2},\ldots,a_n^1,\ldots,a_n^{k_n}.$$

$$\text{počet } k\text{-tic s indexy} =$$

$$= (\text{počet } k\text{-tic bez indexů}) \cdot (\text{počet způsobů, jak k libovolné } k\text{-tici doplnit indexy}).$$

$$k! = (\text{počet } k\text{-tic bez indexů}) \cdot (k_1!k_2!\cdots k_n!).$$

Permutace s opakováním – 2. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{k_1\text{-krát}}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{k_2\text{-krát}}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Na začátku máme k volných pozic.

Permutace s opakováním – 2. důkaz

Vyrábíme permutaci k symbolů

$$\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{k_1\text{-krát}},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{k_2\text{-krát}},\dots,\underbrace{a_n,\dots,a_n}_{k_n\text{-krát}}.$$

Na začátku máme k volných pozic.
Postupně vybíráme pozice pro k_1 prvků a_1, k_2 prvků a_2, atd.:

$$\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\binom{k-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{k_n}{k_n}=$$

$$=\frac{k\cdots(k-k_1+1)}{k_1!}\,\frac{(k-k_1)\cdots(k-k_1-k_2+1)}{k_2!}\cdots\frac{k_n\cdots 1}{k_n!}.$$

Kombinace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Kombinace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k zákusků?

Kombinace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k zákusků?

Důkaz: Každý výběr lze znázornit „obrázkem“. Je-li např. $n = 4$ a $k = 6$, pak šestici $a_1, a_1, a_1, a_2, a_4, a_4$ odpovídá obrázek

$$\circ \circ \circ | \circ || \circ \circ.$$

Kombinace s opakováním

Věta. Nechť $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků A je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad: V cukrárně mají n druhů zákusků. Kolika způsoby lze zakoupit k zákusků?

Důkaz: Každý výběr lze znázornit „obrázkem". Je-li např. $n = 4$ a $k = 6$, pak šestici $a_1, a_1, a_1, a_2, a_4, a_4$ odpovídá obrázek

$$\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ.$$

Obecně: k koleček a $n-1$ oddělovačů. Každá posloupnost těchto symbolů jednoznačně určuje jistou k-tici sestavenou z prvků množiny A. Počet těchto posloupností je $\binom{n+k-1}{k}$.