Lineární homogenní rekurentní rovnice s konstantními koeficienty

Věta. *Každé řešení rovnice*

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}$$

má tvar

$$a_n = P_1(n) w_1^n + \cdots + P_l(n) w_l^n,$$

kde $w_1, \ldots, w_l$ *jsou všechny kořeny polynomu*

$$w^k - \alpha_1 w^{k-1} - \alpha_2 w^{k-2} - \cdots - \alpha_k,$$

jejichž násobnosti jsou $n_1, \ldots, n_l$*, a pro každé* $i \in \{1, \ldots, l\}$ *je* P_i *polynom stupně nejvýše* $n_i - 1$.

Cvičení

1. Použijte větu o řešení homogenní lineární rekurentní rovnice k nalezení vzorce pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pro $n \geq 2$.
2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečními členy $a_0 = -4$, $a_1 = 5$, $a_2 = -5$ a rekurentním vztahem $a_n = 4a_{n-1} + 11a_{n-2} - 30a_{n-3}$, $n \geq 3$. Najděte vzorec pro n-tý člen.
3. Kolika způsoby lze vyplnit obdélník o rozměrech $1 \times n$ pomocí domin (dlaždice 1×2) a modrých a zelených monomin (dlaždice 1×1)? Odvoďte rekurentní rovnici pro hledaný počet a vyřešte ji, tj. najděte vzorec pro n-tý člen.
4. Kolik existuje posloupností délky n sestavených ze znaků A, B, C, 1, 2, 3, 4, ve kterých dvě písmena nikdy nejsou vedle sebe? Najděte rekurentní rovnici pro hledaný počet a vyřešte ji.