Generující funkce

Algoritmus pro řešení rekurentních rovnic metodou generujících funkcí

(i) Pomocí rekurentní rovnice pro $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ najdi rovnici pro generující funkci $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(ii) Vypočítej z této rovnice $A(z)$.

(iii) Rozviň $A(z)$ do mocninné řady, vzorec pro a_n je dán koeficientem u z^n.

Cvičení

1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je zadána počátečním členem $a_0 = 1$ a rekurentním vztahem
$$a_n = 2a_{n-1} + n - 1, \quad n \geq 1.$$
Najděte její generující funkci a vzorec pro n-tý člen.

2. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti, která je zadána počátečním členem $a_0 = 0$ a rekurentním vztahem
$$a_n = 3a_{n-1} + 3 \cdot 2^n - 4n, \quad n \geq 1.$$

3. Najděte vzorec pro n-tý člen posloupnosti, která je zadána počátečními členy $a_0 = -1/2$, $a_1 = 1$ a rekurentním vztahem
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1, \quad n \geq 2.$$

4. a) Nechť $A(z)$ je generující funkce jisté posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Jak vypadá posloupnost, jejíž generující funkce je $A(z)/(1-z)$?

   b) Použijte řešení předchozí části k nalezení vzorce pro n-tý člen rekurentně zadané posloupnosti $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0$.